





VERHANDELING

OVER HET

SOMMEREN EN INTERPOLEREN

VAN

ARITHMETISCHE SERIËN,

DOOR

JACOB FLORIJN,

Lid van het Koninklijk Nederlandsch Instituut van Wetenschappen, Letterkunde en Schoone Kunsten, enz. enz.

Uitgegeven door hetzelve Instituut.

TE *AMSTERDAM,*
Bij P. DEN HENGST en ZOON.
MDCCCXVI.

RAPPORT aan de EERSTE KLASSE van het NEDERLANDSCHE INSTITUUT van Wetenschappen, Letterkunde en Schoone Kunsten, over eene Verhandeling van den Heer FLORIJN, ten tijtel voerende: Verhandeling over het Sommeren en Interpoleren van Arithmetische Seriën.

De Seriën of reeksen maken een zeer gewigtig deel uit van de Stelkunde; en vele Schrijvers hebben over dezelve gehandeld: het bepalen van den algemeenen term en van de som derzelve hebben vooral de Wiskunstenaars bezig gehouden.

Het getal der genen, die over de interpolatie of tusschen invoeging van termen gehandeld hebben, is minder groot; niet tegenstaande het uitstekend nut van die interpolatie in de Sterrekunde en ook in verscheide vakken der Natuurkunde.

Eene korte inhoud te geven van eene verhandeling als deze, welke geheel uit algebraische formulen en numerische voorbeelden bestaat, is niet wel mogelijk, maar zoo de volmaaktheid van eene verhandeling van dien aart afhangt, Theoretisch, 1°. *van de eenvoudigheid der grondbeginselen: 2°. van de duidelijkheid en kortheid der bewijzen: 3°. van de eenvoudigheid en elegantie der formulen: 4°. van derzelver volledigheid: en boven dien* Practisch; *van de gemaklijkheid, waar mede die formulen op alle voorkomende gevallen kunnen toegepast worden, mitsgaders van de keuze van voorbeelden en derzelver aantal en verscheidenheid; maken de Rapporteurs geen zwarigheid de Klasse te verzekeren, dat er, huns oordeels, en na dat zij verscheide Schrijvers opzettelijk hebben geraadpleegd, geene verhandeling over dit onderwerp bestaat, welke, noch op verrena, ten opzigte van alle die vereischten, in vergelijking kan komen met deze: en dat, nu nog, eene verhandeling gelijk deze, voor de mathematische wetenschappen eene wezenlijke aanwinst is: en in 't bijzonder in onze taal, waarin men met goede stukken over soortgelijke onderwerpen minder rijkelijk voorzien is, ten hoogste welkom moet zijn.*

De ondergeteekende kunnen derhalve geen ogenblik in twyfel staan

ſtaan de Klasſe aanteraden, deze uitmuntende Verhandeling met hare goedkeuring te bevestigen en tot het uitgeven van dezelve te beſluiten.

Eenigzints moeijelijker zal het zijn te beſlisſen, op welke wijze die Verhandeling zoude behoren te worden uitgegeven, afzonderlijk of in de werken van de Klasſe? Hier zijn de belangen van de wetenſchappen en van het publiek ter eener, en die van de Klasſe aan de andere zijde, in een tweeſtrijd.

Het belang der wetenſchappen en dat van 't publiek ſchijnt te vorderen, dat die Verhandeling voor allen gemakkelijk verkrijgbaar gemaakt worde; vooral om dat men nergens voor de applicatie der formulen en daar door voor de beoefening eene zoo ſchoone keuze en zoo groote verſcheidenheid van belangrijke voorbeelden aantreft: dit belang pleit derhalve voor eene afzonderlijke uitgave van deze ſchoone Verhandeling.

De eer der Klasſe aan den anderen kant zoude vorderen, dat dit ſtuk in derzelver Verhandelingen werd gedrukt. Maar dusdanige Verhandelingen komen minder in handen van het algemeen: zij zijn meer voor Geleerden als zoodanigen geſchikt, dan voor beoefenaren van alle Klasſe. Ook zoude dan misſchien, en wel om dezelfde rede, het getal der voorbeelden moeten verminderd worden; waardoor echter de Verhandeling veel van haar nut en van hare waarde zoude verliezen.

Wij zouden om alle deze redenen van gedachten zijn, dat om beide zaken, en de eer der Klasſe en het nut van het publiek te vereenigen, die Verhandeling afzonderlijk door de Klasſe zoude behoren uitgegeven te worden.

Wij onderwerpen dit ons gevoelen aan het oordeel der Klasſe.

Amſterdam 14 *April* 1814.

(*was geteekend*)

J. H. VAN SWINDEN,
C. EKAMA.

De Eerſte Klasſe heeft zich met het bovenſtaand Rapport vereenigd en dien overeenkomſtig beſloten.

G. VROLIK,
Secretaris.

VERHANDELING

OVER HET SOMMEREN EN INTERPOLEREN

VAN

ARITHMETISCHE SERIËN;

UIT DE EENVOUDIGSTE BEGINSELEN AFGELEID, EN MET TOEPASSELIJKE VOORBEELDEN OPGEHELDERD:

DOOR

JACOB FLORIJN.

BEPALING.

Arithmetische Seriës noemt men, in het algemeen, elke Rij van Getallen, welker onmiddelijk op elkander volgende termen, gedurig van elkander afgetrokken, eene nieuwe *Seriës* maken, waarvan de gedurige verſchillen, op dezelfde wijze genomen, al wederom eene nieuwe *Seriës* geven, en zoo voorts, tot dat men eindelijk eene *Seriës* verkrijgt van gelijke getallen, of welker verſchillen *nul* zijn.

Als, bij voorbeeld:

A . . . . 1, 5, 15, 35, 70, 126, 210, &c.
B . . . . 4, 10, 20, 35, 56, 84, &c.
C . . . . 6, 10, 15, 21, 28, &c.
D . . . . 4, 5, 6, 7, &c.
E . . . . 1, 1, 1, &c.

In dit voorbeeld beteekent A de *Arithmetische Seriës;* B is de *Seriës* der *Eerste Verschillen;* C der *Tweede;* D der *Derde;* en E der *Vierde Verschillen,* welke laatste allen aan elkander gelijk zijn: zoo dat A eene *Arithmetische Seriës* is, welker vierde verschillen gelijk zijn, en waarvan dus de vijfde verschillen *nul* worden.

EERSTE ALGEMEEN VOORSTEL.

Gegeven zijnde de eerste termen van eene *Arithmetische Seriës,* en van de *Seriën* der eerste, tweede, derde verschillen enz. tot de laatste, die allen gelijk zijn; om hieruit den *Algemeenen Term* en de *Som* der Termen te bepalen.

OPLOSSING.

	1, 2, 3, 4, 5, 6 termen.
1°. Laat de *Arithm. Seriës* zijn	$A, \overset{I}{A}, \overset{II}{A}, \overset{III}{A}, \overset{IV}{A}, \overset{V}{A}$, &c.
De Seriës der 1ste verschillen	$B, \overset{I}{B}, \overset{II}{B}, \overset{III}{B}, \overset{IV}{B}$, &c.
— — — 2de — —	$C, \overset{I}{C}, \overset{II}{C}, \overset{III}{C}$, &c.
— — — 3de — —	$D, \overset{I}{D}, \overset{II}{D}$, &c.
— — — 4de — —	$E, \overset{I}{E}$, &c.
&c.	&c.

zoo dat A, B, C, D, E &c. achtervolgelijk de eerste termen dezer *Seriën* verbeelden; $\overset{I}{A}, \overset{I}{B}, \overset{I}{C}, \overset{I}{D}, \overset{I}{E}$ &c. de tweede; $\overset{II}{A}, \overset{II}{B}, \overset{II}{C}, \overset{II}{D}$ &c. de derde, en zoo vervolgens; dan heeft men

$$\overset{I}{A} = A + B \qquad \overset{I}{B} = B + C \qquad \overset{I}{C} = C + D \qquad \text{enz.}$$
$$\overset{II}{A} = \overset{I}{A} + \overset{I}{B} \qquad \overset{II}{B} = \overset{I}{B} + \overset{I}{C} \qquad \overset{II}{C} = \overset{I}{C} + \overset{I}{D}$$
$$\overset{III}{A} = \overset{II}{A} + \overset{II}{B} \qquad \overset{III}{B} = \overset{II}{B} + \overset{II}{C} \qquad \overset{III}{C} = \overset{II}{C} + \overset{II}{D}$$
$$\overset{IV}{A} = \overset{III}{A} + \overset{III}{B} \qquad \overset{IV}{B} = \overset{III}{B} + \overset{III}{C} \qquad \overset{IV}{C} = \overset{III}{C} + \overset{III}{D}$$

&c. &c. &c. &c. &c. &c.

En

En hieruit:

$A=A$

$\overset{I}{A}=A+B$

$\overset{II}{A}=A+2B+C$

$\overset{III}{A}=\overset{I}{A}+2\overset{I}{B}+\overset{I}{C}=A+3B+3C+D$

$\overset{IV}{A}=\overset{II}{A}+2\overset{II}{B}+\overset{II}{C}=\overset{I}{A}+3\overset{I}{B}+3\overset{I}{C}+\overset{I}{D}=A+4B+6C+4D+E$

&c. &c. &c. &c.

Waaruit de wet van voortgang van zelve klaarblijkelijk is: namelijk,

$A=A$

$\overset{I}{A}=A+B$

$\overset{II}{A}=A+2B+C$

$\overset{III}{A}=A+3B+3C+D$

$\overset{IV}{A}=A+4B+6C+4D+E$

$\overset{V}{A}=A+5B+10C+10D+5E+F$ . . . .

$\overset{VI}{A}=A+6B+15C+20D+15E+6F+G$

&c. &c.

zijnde bijgevolg de *Coëfficienten* van A, B, C, D enz. niets anders dan de gewone en bekende *Coëfficienten*, of *Unciae*, der Magten van een *Binomium:* weshalve in het algemeen de n^de^ term der *Arithmetische Seriës* A, $\overset{I}{A}$, $\overset{II}{A}$, $\overset{III}{A}$, enz. zal uitgedrukt worden, door

$$T=A+(n-1)B+\frac{(n-1)(n-2)}{2.}C+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\ 3.}D+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.\ 3.\ 4.}E\ \&c.$$

welke *Formule* bijgevolg den Algemeenen Term (dien wij in het vervolg altijd T zullen noemen) van alle *Arithmetische Seriën* te kennen geeft.

2°. Om de Som te bepalen, die wij S zullen noemen, zoo is

$A=A$

$A+\overset{I}{A}=2A+B$

$A+\overset{I}{A}+\overset{II}{A}=3A+3B+C$

$A+\overset{I}{A}+\overset{II}{A}+\overset{III}{A}=4A+6B+4C+D$

$A+\overset{I}{A}+\overset{II}{A}+\overset{III}{A}+\overset{IV}{A}=5A+10B+10C+5D+E$

$A+\overset{I}{A}+\overset{II}{A}+\overset{III}{A}+\overset{IV}{A}+\overset{V}{A}=6A+15B+20C+15D+6E+F$

&c. &c.

 zijn-

zijnde bijgevolg de *Coëfficienten* als voren, en daarom de Som van n termen der *Seriës* A, $\overset{I}{A}$, $\overset{II}{A}$, $\overset{III}{A}$ &c. of

$$S = nA + \frac{n(n-1)}{2.}B + \frac{n(n-1)(n-2)}{2. \quad 3.}C + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2. \quad 3. \quad 4.}D + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2. \quad 3. \quad 4. \quad 5.}E \;\&c.$$

Dat te vinden was.

I. AANMERKING.

Volgens de *Bepaling* moet men, in elke *Arithmetische Seriës*, eindelijk op gelijke verschillen komen, zoo dat noodzakelijk of B, of C, of D &c. en dan mede alle de volgende o worden; weshalve aldaar de beide gevondene *Formulen* voor T en S afbreken, en deze bijgevolg altijd maar een bepaald getal van termen hebben, of eindig zijn. Hieruit heeft men dan deze

GEVOLGEN.

1. Als van de *Arithmetische Seriës* de termen zelven alle aan elkander gelijk zijn, of de eerste verschillen o, heeft men $B = C = D = E = \&c. = o$:

derhalve $T = A$ en $S = nA$.

2. Als de eerste verschillen gelijk, of de tweede en volgende alle o zijn, heeft men $C = D = \&c. = o$:

derhalve $T = A + (n-1)B$

$$\text{en } S = nA + \frac{n(n-1)}{2}B,$$

hetwelk het geval is voor alle gewoone *Arithmetische Progressien.*

3. Als de tweede verschillen gelijk zijn, is $D = E = \&c. = o$:

$$\text{derhalve } T = A + (n-1)B + \frac{(n-1)(n-2)}{2}C$$

$$\text{en } S = nA + \frac{n(n-1)}{2}B + \frac{n(n-1)(n-2)}{2. \quad 3}C,$$

hetwelk het geval is voor alle *Polygonaal-getallen.*

4. Als

4. Als de derde verschillen gelijk zijn, is E &c. $=0$:

derhalve $T=A+(n-1)B+\frac{(n-1)(n-2)}{2}C+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\ \ 3}D$

en $S=nA+\frac{n(n-1)}{2}B+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.\ \ 3}C+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\ \ 3.\ \ 4}D$,

hetwelk het geval is voor alle *Pyramidaal-getallen.*

En zoo vervolgens.

1. VOORBEELD.

Gegeven zijnde, 1, 5, 9, 13, 17, 21, &c.
4, 4, 4, 4, 4, &c.

zoo is $A=1$ en $B=4$: derhalve $T=1+4(n-1)=4n-3$

en $S=n+\frac{4n(n-1)}{2}=\frac{4n^2-2n}{2}=n(2n-1)$

Laat $n=6$ zijn; dan is de 6de Term, of $T=21$

En de Som der 6 eerste Termen, of $S=6.\ 11=66$

2. VOORBEELD.

Gegeven 1, 3, 6, 10, 15, 21, &c.
2, 3, 4, 5, 6, &c.
1, 1, 1, 1, &c.

Zoo is $A=1$, $B=2$ en $C=1$:

derhalve $T=1+2(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{2}=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$

en $S=n+n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.\ \ 3}=\frac{n^3+3n^2+2n}{2.\ \ 3}=\frac{n(n+1)(n+2)}{2.\ \ 3}$

Laat $n=6$ zijn; dan is de 6de Term, of $T=3.\ 7=21$

En de Som der 6 eerste Termen, of $S=7.\ 8=56$.

3. VOORBEELD.

Gegeven 1, 4, 10, 20, 35, 56, &c.
3, 6, 10, 15, 21, &c.
3, 4, 5, 6, &c.
1, 1, 1, &c.

Zoo is $A = 1$, $B = 3$, $C = 3$ en $D = 1$:

derhalve $T = 1 + 3(n-1) + \frac{3(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\ 3}$

of $T = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{2.\ 3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2.\ 3}$

En $S = n + \frac{3n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\ 3.\ 4}$

of $S = \frac{n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n}{2.\ 3.\ 4} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2.\ 3.\ 4}$

Laat $n = 6$ zijn; dan is de 6de Term, of $T = 7.\ 8 = 56$

En de Som der 6 eerste Termen, of $S = 7.\ 2.\ 9 = 126$

Laat $n = 100$ zijn; dan is de 100ste Term,

of $T = \frac{100.\ 101.\ 102}{2.\ 3} = 10100.\ 17 = 171700$

en $S = \frac{100.\ 101.\ 102.\ 103}{2.\ 3.\ 4} = \frac{171700.\ 103}{4}$

of $S = 42925.\ 103 = 4421275.$

4. VOORBEELD.

In de voorgaande voorbeelden hebben wij altijd $A = 1$ genomen, of onderfteld, dat de *Arithmetifche Seriës* van de eenheid begint; doch de *Formulen* zijn algemeen: als

gegeven zijnde 8, 16, 31, 57, 99, 163, &c.
8, 15, 26, 42, 64, &c.
7, 11, 16, 22, &c.
4, 5, 6, &c.
1, 1, &c.

Hier

Hier is A = B = 8, C = 7, D=4 en E=1, zijnde F &c.=0.

Derhalve $T=8+8(n-1)+\frac{7.(n-1)(n-2)}{2}+\frac{2(n-1)(n-2)(n-3)}{3}+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.\ 3.\ 4}$

of $T=\frac{n^4+6n^3+23n^2+66n+96}{24}$

En $S=8n+4n(n-1)+\frac{7n(n-1)(n-2)}{2.\ 3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\ 3.\ 4}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}$

of $S=\frac{n^5+10n^4+55n^3+230n^2+664n}{120}$

Laat n=6 zijn; dan is de 6de Term, of $T=\frac{2n^3+23n+82}{4}=\frac{652}{4}=163$

en de ſom van de 6 Termen, of $S=\frac{n^4+10n^3+55n^2+230n+664}{20}$

dat is, $S=\frac{7480}{20}=374$.

Door den Algemeenen Term T kan men de gegevene *Seriës* niet alleen naar achteren verder verlengen, met na elkander n=7, 8, 9, 10 enz. te nemen; maar, zoo dezelve niet met 1 begint, (als in dit voorbeeld) kan men ook de voorafgaande, of weggelatene termen bepalen, door te ſtellen n=0, − 1, − 2, − 3 enz.: want

ſtellende n=0, dan wordt $T=\frac{96}{24}=4$

——— n=−1, — —— $T=\frac{1-6+23-66+96}{24}=\frac{48}{24}=2$

——— n=−2, — —— $T=\frac{16-48+92-132+96}{24}=\frac{24}{24}=1$.

Zoo dat de getallen 4, 2, 1 mede tot dezelfde *Arithmetiſche Seriës* behooren, gelijk blijkt.

1, 2, 4, 8, 16, 31, 57, &c.
1, 2, 4, 8, 15, 26, &c.
1, 2, 4, 7, 11, &c.
1, 2, 3, 4, &c.
1, 1, 1, &c.

Men

Men kan verder ſtellen $n = -3, -4, -5, -6$ enz. en daardoor zal men verkrijgen . . $T = 1, 3, 9, 22$ enz.
zoodat de *Seriës* ter wederzijde onbepaaldelijk kan verlengd worden, in dezer voege.

&c. 22, 9, 3, 1, 1, 2, 4, 8, 16, 31 &c.
&c. — 13, —6, —2, 0, 1, 2, 4, 8, 15 &c.
&c. 7, 4, 2, 1, 1, 2, 4, 7 &c.
&c. — 3, —2, —1, 0, 1, 2, 3 &c.
&c. 1, 1, 1, 1, 1, 1 &c.

Als men nu ook van deze *Seriës* den Algemeenen Term en de Som wilde bepalen, zoude men $A = 22$, $B = -13$, $C = 7$, $D = -3$ en $E = 1$ moeten nemen: doch men kan dezelven gemakkelijker uit de voorgaanden vinden, door $n - 7$ in de plaats van n te ſtellen, omdat nu de *Seriës* 7 termen vroeger begint; waardoor men vinden zal

$$T = \frac{(n-7)^4 + 6(n-7)^3 + 23(n-7)^2 + 66(n-7) + 96}{24}$$

$$\text{of } T = \frac{n^4 - 22n^3 + 191n^2 - 746n + 1104}{24}$$

$$\text{En } S = \frac{(n-7)^5 + 10(n-7)^4 + 55(n-7)^3 + 230(n-7)^2 + 664(n-7)}{120}$$

$$\text{of } S = \frac{n^5 - 25n^4 + 265n^3 - 1415n^2 + 3814n - 5040}{120}$$

Doch deze laatſte *Formule* zal de ware Som der *Seriës*, van 22 af beginnende, nog niet uitdrukken; omdat men in de voorgaande van van den term 8 af begonnen is: weshalve 'er alle de termen van 22 tot 8, bedragende te zamen 42 of $\frac{5040}{120}$, zullen moeten worden bijgeteld; zoodat men voor de Som van n termen, beginnende nu met 22, als den eerſten term, zal hebben

$$S = \frac{n^5 - 25n^4 + 265n^3 - 1415n^2 + 3814n}{120}$$

5. VOOR-

5. VOORBEELD.

Uit het voorgaande blijkt, dat de Regels algemeen zijn, offchoon ſommige der grootheden A, B, C enz. negatief worden; waarvan ter nadere opheldering kan ſtrekken het volgende voorbeeld.

Gegeven zijnde de *Arithmetiſche Seriës*,

4, 5, 4, 2, 0, —1, 0, 4, 12, 25, 44, 70 &c.
1, —1, —2, —2, —1, 1, 4, 8, 13, 19, 26 &c.
—2, —1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 &c.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 &c.

dan is A = 4, B = 1, C = —2, D = 1 en de verdere grootheden E, F, G &c. = 0: derhalve

$$T = 4 + n\text{-}1 - \frac{2(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\ 3}$$

$$\text{of } T = \frac{n^3 - 12n^2 + 35n}{2.\ 3} = \frac{n(n-5)(n-7)}{2.\ 3}$$

$$\text{En } S = 4n + \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\ 3.\ 4}$$

$$\text{of } S = \frac{n^4 - 14n^3 + 47.n^2 + 62n}{2.\ 3.\ 4}$$

Laat $n = 5$ zijn; dan is de 5de Term, of $T = 0$,

en de Som der 5 eerſte Termen, of $S = \frac{360}{24} = 15$

Laat $n = 100$ zijn; dan is de 100ſte Term,

$$\text{of } T = \frac{100.95.93}{2.\ 3} = 50.95.31 = 147250$$

en de Som der 100 eerſte Termen

$$\text{of } S = \frac{100000000 - 14.1000000 + 47.1000 + 62.00}{24}$$

$$\text{dat is } S = \frac{86476200}{24} = 3603175$$

 Zoo

Zoo men deze *Seriës* met de derde 4, als eerste Term, wil doen aanvangen, moet men n+7 in de plaats van n schrijven; dan wordt

$$T = \frac{n(n+2)(n+7)}{2.\ 3}$$

$$\text{En } S = \frac{(n+7)^4 - 14(n+7)^3 + 47(n+7)^2 + 62(n+7)}{24} - 14$$

$$\text{of } S = \frac{n^4 + 14n^3 + 47n^2 + 34n}{2.\ 3.\ 4}$$

Men ziet hieruit, dat van deze *Seriës* alleen 3 Termen kunnen o worden, door namelijk te nemen $n = 0$

$n = -2$

en $n = -7$

6. VOORBEELD.

Gegeven zijnde p^2, $(p+q)^2$, $(p+2q)^2$, $(p+3q)^2$, &c.

of p^2, $p^2+2pq+q^2$, $p^2+4pq+4q^2$, $p^2+6pq+9q^2$, &c.

$2pq+q^2$, $2pq+3q^2$, $2pq+5q^2$, &c.

$2q^2$, $2q^2$, &c.

zoo is $A = p^2$, $B = 2pq+q^2$ en $C = 2q^2$: hier door vindt men

$$T = p^2 + (n-1)(2pq+q^2) + (n-1)(n-2)q^2 = p^2 + (n-1)2pq + (n-1)^2q^2$$

of $T = (p+(n-1)q)^2$

$$\text{En } S = np^2 + \frac{n(n-1)(2pq+q^2)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)q^2}{3}$$

$$\text{of } S = np^2 + n(n-1)pq + \frac{n(n-1)(2n-1)q^2}{6}$$

Laat $p = 1$ en $q = 1$ zijn, dan wordt de *Seriës*

1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, &c.

en bijgevolg $T = n^2$

$$\text{en } S = n + n(n-1) + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = n^2 + \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}$$

$$\text{of } S = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2\ .\ 3}$$

7. VOOR-

7. VOORBEELD.

Gegeven pq, $(p+r)(q+r)$, $(p+2r)(q+2r)$, $(p+3r)(q+3r)$ &c.
of pq, $pq+(p+q)r+r^2$, $pq+(2p+2q)r+4r^2$, $pq+(3p+3q)r+9r^2$, &c.
$(p+q)r+r^2$, $(p+q)r+3r^2$, $(p+q)r+5r^2$, &c.
$2r^2$, $2r^2$, &c.

Derhalve $A=pq$, $B=(p+q)r+r^2$, en $C=2r^2$: bijgevolg

$$T=pq+(n-1)(p+q)r+(n-1)r^2+(n-1)(n-2)r^2$$

of $T=pq+(n-1)(p+q)r+(n-1)^2r^2=(p+(n-1)r)(q+(n-1)r)$

En $S=npq+\frac{n(n-1)}{2}(p+q)r+\frac{n(n-1)r^2}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)r^2}{3}$

of $S=npq+\frac{n(n-1)}{2}(p+q)r+\frac{n(n-1)(2n-1)r^2}{2.\ 3}$

Laat $p=1$, $q=2$ en $r=1$ zijn; dan is de voorgestelde Seriës
1×2, 2×3, 3×4, 4×5, 5×6, 6×7, &c.
of 2, 6, 12, 20, 30, 42, &c.
zijnde de natuurlijk op elkander volgende *Pronikgetallen.*

Bijgevolg $T=n(n+1)$

en $S=2n+\frac{3n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(2n-1)}{2.\ 3}=\frac{n^3+3n^2+2n}{3}$

of $S=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Laat $n=6$ zijn; dan is de 6de Term, of $T=6.\ 7=42$
en de Som der 6 eerste Termen, of $S=\frac{6.\ 7.\ 8}{3}=112.$

Laat $n=100$ zijn; dan is de 100ste Term, of $T=100.\ 101=10100$
en de Som der 100 Termen, of $S=\frac{100.\ 101.\ 102}{3}=10100.\ 34=343400.$

BIJVOEGSEL.

Als men, in dit voorbeeld, ſtelt $r = -1$, zoo dat de Seriës is

$$pq,\ (p-1)\ (q-1),\ (p-2)\ (q-2),\ (p-3)\ (q-3)\ \&c.$$

verkrijgt men $S = npq - \frac{n(n-1)}{2}(p+q)r + \frac{n(n-1)(2n-1)r^2}{2.\ 3}$

dat is $S = npq - \frac{n(n-1)(p+q)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{2.\ 3}$

of $S = n\left[\left(p - \frac{n-1}{2}\right)\left(q - \frac{n-1}{2}\right) + \frac{(n-1)(n+1)}{2.\ 2.\ 3}\right]$

zijnde eene algemeene *Formule*, waardoor men het getal Kogels kan berekenen op een langwerpigen ſtapel, van n lagen, hebbende p Kogels in de breedte en q in de lengte van de onderſte laag. Bij voorbeeld: $p = 10$, $q = 20$ en $n = 7$ zijnde, zoo is $S = 7\ (7.\ 17 + 4) = 7.\ 123 = 861$: want nu liggen 'er

in de onderſte laag	$10 \times 20 =$	200	Kogels.
— — tweede —	$9 \times 19 =$	171	— —
— — derde —	$8 \times 18 =$	144	— —
— — vierde —	$7 \times 17 =$	119	— —
— — vijfde —	$6 \times 16 =$	96	— —
— — zesde —	$5 \times 15 =$	75	— —
— — bovenſte —	$4 \times 14 =$	56	— —

In het geheel 861 Kogels.

Voor een vollen Stapel, die zoo vele lagen heeft, als 'er Kogels in de breedte liggen, moet men ſtellen $n = p$;

dan wordt $S = n\left[\frac{(n+1)}{2}\ \frac{(2q-n+1)}{2} + \frac{(n-1)(n+1)}{2.\ 2.\ 3}\right]$

of $S = n\ (n+1)\left[\frac{2q-n+1}{2.\ 2} + \frac{n-1}{2.\ 2.\ 3}\right]$

dat is, $S = n\ (n+1)\left(\frac{3q-n+1}{6}\right)$

Bij

Bij voorbeeld: hoe vele Kogels liggen 'er op een' Stapel, als 'er in de onderfte laag zijn 12 in de breedte en 32 in de lengte?

Antwoord $= 12.\ 13.\ \frac{85}{6} = 13.\ 170 = 2210$ Kogels.

Als de Stapel, in plaats van langwerpig te zijn, vierkant is, heeft men ook $q = n$; en dan is

$$S = n\ (n+1) \left(\frac{2n+1}{6}\right),$$ als in het 6de Voorbeeld.

Bij voorbeeld: om te vinden, hoe vele Kogels 'er liggen in een vierkanten Stapel van 20 in ieder zijde?

Antwoord; $S = 20.\ 21.\ \frac{41}{6} = 70.\ 41 = 2870$ Kogels.

II. AANMERKING.

Uit de voorgaande voorbeelden kan men klaar genoeg bemerken, hoe algemeen deze handelwijze is, om den algemeenen Term en de Som te bepalen van allerleije *Arithmetifche Seriën*, mits dezelve maar op gelijke verfchillen te brengen zijn. Van dit foort van *Seriën* zijn 'er eenige bijzondere, welker gebruik meermalen voorkomt; die, met de eenheid aanvangende, de eenvoudigste *Formulen* opleveren, en waarop de geheele Leer van de zoogenoemde *Figuurlijke Getallen* gegrond is. Deze zullen wij nu afzonderlijk befchouwen.

I. GEVAL.

Voor de Natuurlijke Getallen en derzelver Magten.

I. VOORBEELD.

Om de Som te vinden van de *Series*.

$1, 2, 3, 4, 5, 6,$ &c. . . . . n.

Hier is $A = 1$ en $B = 1$: dus $T = 1 + n - 1 = n$

en $S = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

2. VOOR-

BIJVOEGSEL.

Als het getal der termen n oneindig groot is, verdwijnt n ten opzigte van n^2, zoo mede n^2 in betrekking tot n^3, en n^3 ten opzigte van n^4 enz. in welk geval men derhalve hebben zal

$$1+2+3+4 \ldots\ldots n = \frac{n^2}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+4^2 \ldots\ldots n^2 = \frac{n^3}{3}$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3 \ldots\ldots n^3 = \frac{n^4}{4}$$

&c. &c.

En algemeen

$$1^m+2^m+3^m+4^m \ldots\ldots n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1}$$

II. GEVAL.

Voor de Polygonaal-getallen.

I. VOORBEELD.

Voor de *Trigonaal-* of Driehoekige-getallen.

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, &c.
2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.
1, 1, 1, 1, 1, &c.

Derhalve $A=1$, $B=2$ en $C=1$:

daarom $T=1+2(n-1)+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$

en $S=n+n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.\ 3}=\frac{n^3+3n^2+2n}{2.\ 3}=\frac{n(n+1)(n+2)}{2.\ 3}$

2. VOOR-

2. VOORBEELD.

Voor de *Tetragonaal*, *Quadraat-* of Vierhoekige-getallen.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, &c.
3, 5, 7, 9, 11, 13, &c.
2, 2, 2, 2, 2, &c.

Derhalve $A=1$, $B=3$ en $C=2$:

dus $T=1+3(n-1)+(n-1)(n-2)=n^2$

en $S=n+\frac{3n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3}=\frac{2n^3+3n^2+n}{2.\ 3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2.\ 3}$

3. VOORBEELD.

Voor de *Pentagonaal-* of Vijfhoekige-getallen.

1, 5, 12, 22, 35, 51, &c.
4, 7, 10, 13, 16, &c.
3, 3, 3, 3, &c.

Derhalve $A=1$, $B=4$ en $C=3$:

dus $T=1+4(n-1)+\frac{3(n-1)(n-2)}{2}=\frac{3n^2-n}{2}=\frac{n(3n-1)}{2}$

en $S=n+2n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{2}=\frac{n^3+n^2}{2}=\frac{n^2(n+1)}{2}$

4. VOORBEELD.

Voor de *Hexagonaal-* of Zeshoekige-getallen.

1, 6, 15, 28, 45, 66, &c.
5, 9, 13, 17, 21, &c.
4, 4, 4, 4, &c.

Derhalve $A=1$, $B=5$ en $C=4$:

dus $T=1+5(n-1)+2(n-1)(n-2)=2n^2-n=n(2n-1)$

en $S=n+\frac{5n(n-1)}{2}+\frac{2n(n-1)(n-2)}{3}=\frac{4n^3+3n^2-n}{2.\ 3}=\frac{n(n+1)(4n-1)}{2.\ 3}$

In 't algemeen.

Laat p de naam van den *Polygoon* of Veelhoek zijn, en n deszelfs wortel of zijde; dan is altijd

$$A = 1,\ B = p\text{-}1 \text{ en } C = p\text{-}2$$

$$\text{dus } T = 1 + (p\text{-}1)(n\text{-}1) + \frac{(p\text{-}2)(n\text{-}1)(n\text{-}2)}{2} = \frac{(p\text{-}2)n^2 - (p\text{-}4)n}{2}$$

$$\text{en } S = n + \frac{(p\text{-}1)n(n\text{-}1)}{2} + \frac{(p\text{-}2)n(n\text{-}1)(n\text{-}2)}{2.\ 3} = \frac{(p\text{-}2)n^3 + 3n^2 - (p\text{-}2)n}{2.\ 3}$$

Waaruit de volgende Tafel kan gemaakt worden.

$$\text{Voor } p = 3, \text{ is } T = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{en } S = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{2.\ 3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2.\ 3}$$

$$\text{Voor } p = 4, \text{ is } T = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

$$\text{en } S = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2.\ 3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2.\ 3}$$

$$\text{Voor } p = 5, \text{ is } T = \frac{3n^2 - n}{2} = \frac{n(3n\text{-}1)}{2}$$

$$\text{en } S = \frac{3n^3 + 3n^2}{2.\ 3} = \frac{n^2(n+1)}{2}$$

$$\text{Voor } p = 6, \text{ is } T = \frac{4n^2 - 2n}{2} = n(2n\text{-}1)$$

$$\text{en } S = \frac{4n^3 + 3n^2 - n}{2.\ 3} = \frac{n(n+1)(4n\text{-}1)}{2.\ 3}$$

$$\text{Voor } p = 7, \text{ is } T = \frac{5n^2 - 3n}{2} = \frac{n(5n\text{-}3)}{2}$$

$$\text{en } S = \frac{5n^3 + 3n^2 - 2n}{2.\ 3} = \frac{n(n+1)(5n\text{-}2)}{2.\ 3}$$

Voor

Voor p = 8, is $T = \frac{6n^2 - 4n}{2} = n(3n-2)$

en $S = \frac{6n^3 + 3n^2 - 3n}{2.\ 3} = \frac{n(n+1)(2n-1)}{2}$

Voor p = 9, is $T = \frac{7n^2 - 5n}{2} = \frac{n(7n-5)}{2}$

en $S = \frac{7n^3 + 3n^2 - 4n}{2.\ 3} = \frac{n(n+1)(7n-4)}{2.\ 3}$

Voor p = 10, is $T = \frac{8n^2 - 6n}{2} = n(4n-3)$

en $S = \frac{8n^3 + 3n^2 - 5n}{2.\ 3} = \frac{n(n+1)(8n-5)}{2.\ 3}$

Voor &c. &c. &c.

III. GEVAL.

Voor de Pyramidaal-getallen en derzelver verdere Aggregaten.

VOORBEELD.

Gegeven zijnde een Reeks van *Trigonaal-Pyramidalen*, als

1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, &c.
3, 6, 10, 15, 21, 28, &c.
3, 4, 5, 6, 7, &c.
1, 1, 1, 1, &c.

Zoo is A = 1, B = 3, C = 3 en D = 1:

dus $T = 1 + 3(n-1) + \frac{3(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\ 3} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{2.\ 3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2.\ 3}$

$S = n + \frac{3n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\ 3.\ 4} = \frac{n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n}{2.\ 3} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2.\ 3.\ 4}$

De eerste *Aggregaten* dezer Getallen, of de *Pyramidalen* van het tweede Geslacht, zijn

1, 5, 15, 35, 70, 126, &c.
4, 10, 20, 35, 56, &c.
6, 10, 15, 21, &c.
4, 5, 6, &c.
1, 1, &c.

Hetwelk geeft $A=1$, $B=4$, $C=6$, $D=4$ en $E=1$: waaruit men vinden zal $T=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3.4}$

$$\text{en } S=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.3.4.5}$$

Op dezelfde wijze kan men handelen met de *Pyramidalen* en derzelver *Aggregaten*, geformeerd uit de andere *Polygonaal*-getallen; doch men kan de zaak ligtelijk algemeen beschouwen.

In het algemeen.

Als men de laatste, of gelijke verschillen stelt $p-2=a$, zoo heeft men, voor de *Pyramidalen* 1, $3+a$, $6+4a$, $10+10a$, $15+20a$, &c.
1ste verschillen of *Polygonalen* $2+a$, $3+3a$, $4+6a$, $5+10a$, &c.
2de ——— of *Arithm. Progres* $1+2a$, $1+3a$, $1+4a$, &c.
3de ——— of gelijken a, a &c.

Derhalve $A=1$
$B=2+a=p$
$C=1+2a=2p-3$
$D=a=p-2$

Waar-

Waardoor men vindt

$$T = 1 + p(n-1) + \frac{(2p-3)(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(p-2)(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\ 3}$$

$$\text{of } T = \frac{(p-2)n^3 + 3n^2 + (5-p)n}{2.\ 3} = \frac{(p-2)n^3 + (p-2)n^2 + (5-p)n^2 + (5-p)n}{2.\ 3}$$

$$\text{dat is } T = \frac{n(n+1)}{2.\ 3} \times \Big((p-2)n + 5 - p\Big)$$

$$\text{En } S = n + \frac{pn(n-1)}{2} + \frac{(2p-3)n(n-1)(n-2)}{2.\ 3} + \frac{(p-2)n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\ 3.\ 4}$$

$$\text{of } S = \frac{(p-2)n^4 + 2pn^3 + (14-p)n^2 + (12-2p)n}{2.\ 3.\ 4}$$

$$\text{of } S = \frac{(p-2)n^4 + 3(p-2)n^3 + (6-p)n^3 + 2(p-2)n^2 + 3(6-p)n^2 + 2(6-p)n}{2.\ 3.\ 4}$$

$$\text{dat is } S = \frac{n(n+1)(n+2)}{2.\ 3} \times \Big((p-2)n + 6 - p\Big)$$

En dewijl de eerfte *Aggregaten* van de *Pyramidalen*, of wel de *Pyramidalen* van het tweede Geflacht, algemeen zullen uitgedrukt worden, door

1, 4 + a, 10 + 5 a, 20 + 15 a, 35 + 35 a &c.

zal men daar in hebben

$$T = \frac{n(n+1)(n+2)}{2.\ 3} \times \Big((p-2)n + 6 - p\Big)$$

$$\text{en } S = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2.\ 3.\ 4} \times \Big((p-2)n + 7 - p\Big)$$

Derhalve zal men, in 't algemeen, voor de m^{de} *Aggregaten* van de *Polygonalen* p, of voor de *Pyramidaal*-getallen van het m^{de} Geflacht, vinden de volgende algemeene *Formulen*.

$$T = \frac{n(n+1)(n+2)}{2.\ 3.\ 4} \ldots \text{tot } m+1 \text{ termen} \times \Big((p-2)n + m + 4 - p\Big)$$

$$\text{En } S = \frac{n(n+1)(n+2)}{2.\ 3.\ 4} \ldots \text{tot } m+2 \text{ termen} \times \Big((p-2)n + m + 5 - p\Big)$$

VOORBEELD.

Gegeven de Reeks

1, 10, 49, 168, 462, 1092, 2310, 4488, 8151, &c.

zijnde de *Hexagonaal-Pyramidaal*-getallen van het vierde Geslacht, dan heeft men $p = 6$ en $m = 4$:

$$\text{bijgevolg } T = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6} \times (4n+2)$$

$$\text{en } S = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7} \times (4n+3)$$

Laat $n = 9$ zijn; dan is

$$\text{de } 9^{\text{de}} \text{ Term, of } T = \frac{9.\ 10.\ 11.\ 12.\ 13}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6} \times 38 = 3.\ 11.\ 13.\ 19 = 8151$$

$$\text{en de Som, of } S = \frac{9.\ 10.\ 11.\ 12.\ 13.\ 14}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7} \times 39 = 3.\ 11.\ 13.\ 39 = 16731.$$

BIJVOEGSEL.

De *Formule* voor de eenvoudige *Trigonaal-Pyramidalen*,

$$\text{zijnde } T = \frac{n(n+1)(n+2)}{2.\ 3}$$

geeft den algemeenen en gewonen Regel ter berekening van een driekantig gestapelden hoop Kogels, waarvan 'er n liggen in ieder zijde van de onderste laag.

Bij voorbeeld: hoevele Kogels liggen 'er in een driekantigen stapel, als 'er in ieder zijde van de onderste laag zijn 20?

$$\text{Antwoord: } \frac{20.\ 21.\ 22}{2.\ 3} = 10.\ 7.\ 22 = 1540 \text{ Kogels.}$$

Zoo de stapel niet vol is, moet men ook weten hoevele Kogels 'er liggen in iedere zijde van de bovenste laag; hiervoor het getal T voor $n-1$ eveneens zoeken en hetzelve van den geheelen hoop aftrekken.

Bij voorbeeld: zoo van een' ftapel Kogels, in de gedaante van eene geknotte driezijdige *Pyramide*, in de onderfte laag liggen 24 en in de bovenfte 9 Kogels in iedere zijde, moet men van het geheele getal

$$T = \frac{24.\ 25.\ 26}{2.\ 3.} = 4.\ 25.\ 26 = 2600$$

aftrekken $$t = \frac{8.\ 9.\ 10}{2.\ 3} = 3.\ 4.\ 10 = 120$$

zoo blijven 'er 2480 Kogels.

IV. GEVAL.

Voor de Columnare-getallen.

Deze ontftaan uit de *Polygonalen* vermenigvuldigd met hunne wortels: als

Wortels	1,	2,	3,	4,	5 &c.
Polygonalen	1,	2+ a,	3+3a,	4+ 6a,	5+10a &c.
Columnaren	1,	4+2a,	9+9a,	16+24a,	25+50a &c.
		3+2a,	5+7a,	7+15a,	9+26a &c.
			2 +5a,	2+8a,	2+11a &c.
				3a,	3a &c.

In deze heeft men derhalve, zijnde wederom $p = 2 + a$

$A = 1$

$B = 3 + 2a = 2p - 1$

$C = 2 + 5a = 5p - 8$

en $D = 3a \quad = 3p - 6$

Dus $$T = 1 + (2p-1)(n-1) + \frac{(5p-8)(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(p-2)(n-1)(n-2)(n-3)}{2}$$

of $$T = \frac{(p-2)n^3 - (p-4)n^2}{2} = \tfrac{1}{2}n^2\Big((p-2)n + 4 - p\Big)$$

En $$S = n + \frac{(2p-1)n(n-1)}{2} + \frac{(5p-8)n(n-1)(n-2)}{2.\ 3} + \frac{(p-2)(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\ 4}$$

of

$$\text{of } S = \frac{(3p-6)n^4 + (2p+4)n^3 + (18-3p)n^2 + (8-2p)n}{2.\ 3.\ 4}$$

$$\text{of } S = \frac{n(n+1)}{2.\ 3.\ 4} \times \left(3(p-2)n^2 + (10-p)n + 8-2p\right)$$

Welke laatfte *Formule* wederom het eerfte *Aggregaat* dezer Getallen uitdrukt, en zoo vervolgens.

V. GEVAL.

Voor de Pyrgoidaal-getallen.

Deze ontftaan uit de verzameling van de *Columnaren* en *Pyramidalen*, nemende de wortels van de laatfte 1 minder dan van de eerfte: aldus

Wortels	1,	2,	3,	4,	5	&c.
Columnaren	1,	4+2a,	9+ 9a,	16+24a,	25+50a	&c.
Pyramidalen	0,	1 ,	3+ a,	6+ 4a,	10+10a	&c.
Pyrgoidalen	1,	5+2a,	12+10a,	22+28a,	35+60a	&c.
		4+2a,	7+8a,	10+18a,	13+32a	&c.
			3+6a,	3+10a,	3+14a	&c.
				4a,	4a	&c.

Derhalve heeft men wederom $p = 2 + a$, en vervolgens

$$A = 1$$
$$B = 4 + 2a = 2p$$
$$C = 3 + 6a = 6p - 9$$
$$\text{en } D = 4a \quad = 4p - 8$$

$$\text{Dus } T = 1 + 2p(n-1) + \frac{(6p-9)(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(4p-8)(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\ 3}$$

$$\text{of } T = \frac{4(p-2)n^3 - 3(2p-7)n^2 + (2p-7)n}{2.\ 3}$$

$$\text{En } S = n + pn(n-1) + \frac{(6p-9)n(n-1)(n-2)}{2.\ 3} + \frac{(p-2)n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\ 3}$$

$$\text{of } S = \frac{(p-2)n^4 + 3n^3 + (5-p)n^2}{2.\ 3}$$

En

En zoo mede voor derzelver *Aggregaten*.

Deze laatste *Formule* vergeleken met die voor de *Polygonalen* leert ons, dat de *Som van eenige Pyrgoidalen juist gelyk is aan de Som van even zoo vele Polygonalen, vermenigvuldigd met het getal der Termen.*

VI. GEVAL.

Voor de Centrale-Polygonaal-getallen.

Deze zijn van denzelfden aard, als de eenvoudige *Polygonalen*, maar hier in zijn de laatste of gelijke verschillen p, of de naam des Veelhoeks. Zij kunnen daarom uitgedrukt worden, door

$$1, \quad 1+p, \quad 1+3p, \quad 1+6p, \quad 1+10p \quad \&c.$$
$$p, \quad 2p, \quad 3p, \quad 4p \quad \&c.$$
$$p, \quad p, \quad p, \quad \&c.$$

Derhalve is $A = 1$ en $B = C = p$:

$$\text{Dus } T = 1 + p(n-1) + \frac{p(n-1)(n-2)}{2} = \frac{pn(n-1)}{2} + 1$$

$$\text{En } S = n + \frac{pn(n-1)}{2} + \frac{pn(n-1)(n-2)}{2.\ 3} = \frac{pn(n^2-1)}{2.\ 3} + n$$

Hieruit kunnen wederom *Pyramidalen*, *Columnaren* en *Pyrgoidalen* geformeerd worden, welker algemeene Formulen op dezelfde wijze te vinden zijn; als mede voor de nog overige Figuurlijke Getallen: doch hiervan afstappende, ga ik over tot de *Interpolatie*.

INTERPOLATIE.

Hier door verstaat men, om eenige ontbrekende termen in eene gegevene *Seriës* te vinden; als mede, om tusschen derzelver termen andere getallen intevullen, zoodanig dat deze aangevulde *Seriës* volgens dezelfde wet voortloopt, als de gegevene. Het eerste geschiedt gemakkelijk door de *Formule* voor den Algemeenen Term, en voor het laatste dient het volgend

TWEEDE ALGEMEEN VOORSTEL.

Om tusschen twee op elkander volgende Termen, in eene gegevene *Arithmetische Seriës*, één, twee, of meer Termen te *interpoleren*?

OPLOSSING.

Zoek, volgens het *Eerste Voorstel*, de Wet van de *Seriës*, dat is, derzelver algemeenen Term. Laat 'er begeerd worden, om tusschen de m^{de} en $\overline{m+1}^{de}$ termen van deze *Seriës* eenige intevullen. Als 'er dan maar één term tusschen beide moet komen, zoo neem $n = m + \frac{1}{2}$. Als 'er twee termen tusschen beide moeten komen, neem $n = m + \frac{1}{3}$ en $n = m + \frac{2}{3}$. Voor drie termen neem $n = m + \frac{1}{4}$, $m + \frac{1}{2}$, $m + \frac{3}{4}$ enz. In het algemeen, voor p termen tusschen beide, neem achtervolgelijk

$$n = m + \frac{1}{p+1},\ m + \frac{2}{p+1},\ m + \frac{3}{p+1}\ \&c. \ldots \text{tot}\ m + \frac{p}{p+1};$$

en dus voor de r^{de} term der p tusschengevoegden

$$n = m + \frac{r}{p+1}.$$

Dat te vinden was.

I. VOORBEELD.

Gegeven zijnde 1, 3, 5, 7, 9, 11 &c. waarvan de eerste verschillen gelijk zijn en $T = 2n - 1$ is; om hier tusschen beide telkens één term intevullen, wordt $n = m + \frac{1}{2}$ genomen, waar door men heeft $T = 2m + 1 - 1 = 2m$,

en dus voor $m = 1, 2, 3, 4, 5$ &c.
$T = 2, 4, 6, 8, 10$ &c.

en de nieuwe *Seriës* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 &c., welke van denzelfden aard is, als de gegevene, hebbende ook de eerste verschillen alle gelijk.

2. VOORBEELD.

Gegeven zijnde 1, 6, 15, 28 &c. waarvan de tweede verschillen gelijk zijn, en $T = n(2n-1)$ is.

1. Om hier tusschen overal één term te *interpoleren*, zoo neem $n = m + \frac{1}{2}$; dan wordt $T = (m + \frac{1}{2})\, 2m = m(2m + 1)$, en dus

voor $m = 1, 2, 3, 4$ &c.

is $T = 3, 10, 21, 36$ &c.

en de nieuwe *Seriës* 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36 &c.

2. Om 'er twee termen tusschen beide intevoegen, zoo neem $n = m + \frac{1}{3}$ en $n = m + \frac{2}{3}$; waardoor men heeft

$$T = \frac{(3m+1)(6m-1)}{3 \cdot 3} \text{ en } T = \frac{(3m+2)(6m+1)}{3 \cdot 3}$$

En dus voor $m = 1, 2, 3$ &c.

$$T = \frac{20}{9}, \frac{77}{9}, \frac{170}{9} \text{ \&c.}$$

$$\text{en } T = \frac{35}{9}, \frac{104}{9}, \frac{209}{9} \text{ \&c.}$$

En de nieuwe *Seriës* zal zijn

$$1,\ 2\frac{2}{9},\ 3\frac{8}{9},\ 6,\ 8\frac{5}{9},\ 11\frac{5}{9},\ 15,\ 18\frac{8}{9},\ 23\frac{2}{9},\ 28 \text{ \&c.}$$

1ste verschillen $1\frac{2}{9},\ 1\frac{6}{9},\ 2\frac{1}{9},\ 2\frac{5}{9},\ 3,\ 3\frac{4}{9},\ 3\frac{8}{9},\ 4\frac{3}{9},\ 4\frac{7}{9}$ &c.

2de of gelijke $\frac{4}{9},\ \frac{4}{9},\ \frac{4}{9},\ \frac{4}{9},\ \frac{4}{9},\ \frac{4}{9},\ \frac{4}{9},\ \frac{4}{9}$ &c.

3. Om alleen tusschen de 3de en 4de termen, of tusschen de getallen 15 en 28, nog 9 andere te *interpoleren*, of intelasschen, zoo heeft men dat voor $n = 3\frac{1}{10}$ is $T = \frac{31 \cdot 52}{10 \cdot 10} = 16{,}12$

$$n = 3\frac{2}{10} - T = \frac{32 \cdot 54}{10 \cdot 10} = 17{,}28$$

$$n = 3\frac{3}{10} - T = \frac{33 \cdot 56}{10 \cdot 10} = 18{,}48$$

$$n = 3\frac{4}{10} \text{ is } T = \frac{34.\ 58}{10.\ 10} = 19,72$$

$$n = 3\frac{5}{10} - T = \frac{35.\ 60}{10.\ 10} = 21,00$$

$$n = 3\frac{6}{10} - T = \frac{36.\ 62}{10.\ 10} = 22,32$$

$$n = 3\frac{7}{10} - T = \frac{37.\ 64}{10.\ 10} = 23,68$$

$$n = 3\frac{8}{10} - T = \frac{38.\ 66}{10.\ 10} = 25,08$$

$$n = 3\frac{9}{10} - T = \frac{39.\ 68}{10.\ 10} = 26,52$$

En de *geinterpoleerde Seriës* zal zijn

	15	16,12	17,28	18,48	19,72	21	22,32	23,68	25,08	26,52	28
1e V.	1,12	1,16	1,20	1,24	1,28	1,32	1,36	1,40	1,44	1,48	
2e V.	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04		

4. Om de 57ste van de 100 Termen te vinden, die tusschen 15 en 28 kunnen ingezet worden, heeft men $n = 3\frac{57}{101} = \frac{360}{101}$

en $T = \frac{360.\ 619}{101.\ 101} = 21\frac{8619}{10201}$, de begeerde.

Men kan anders ook wel 15 voor den eersten term nemen, waardoor men heeft $A = 15$, $B = 13$ en $C = 4$; en hieruit

$$T = 15 + 13(n-1) + \frac{4(n-1)(n-2)}{2} = 2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$$

Nemende dan $n = 1\frac{57}{101} = \frac{158}{101}$; zoo is wederom

$$T = \frac{360.\ 619}{101.\ 101} = 21\frac{8619}{10201}$$

3. VOORBEELD.

Gegeven de Teerlings-getallen 1, 27, 125, 343 &c. waarvan de derde verschillen gelijk zijn, en de algemeene Term is $(2n-1)^3$.

1. Om tusschen beide één Term intevúllen, moet men nemen $n = m + \frac{1}{2}$; waardoor men heeft $T = (2m)^3$: dus voor $m = 1,\ 2,\ 3,$ &c.
komt $T = 8,\ 64,\ 216,$ &c.

En de aangevulde Seriës is 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343 &c.

2. Om tusschen beide twee Termen te brengen, moet men nemen $n = m + \frac{1}{3}$ en $n = m + \frac{2}{3}$; waardoor men heeft

$$T = \left(\frac{6m-1}{3}\right)^3 \text{ en } \overset{1}{T} = \left(\frac{6m+1}{3}\right)^3.$$

Dus voor $m = \quad 1, \quad 2, \quad 3,$ &c.

$$\text{komt } T = \left(\frac{5}{3}\right)^3, \left(\frac{11}{3}\right)^3, \left(\frac{17}{3}\right)^3 \text{ \&c.}$$

$$\text{en } \overset{1}{T} = \left(\frac{7}{3}\right)^3, \left(\frac{13}{3}\right)^3, \left(\frac{19}{3}\right)^3 \text{ \&c.}$$

En de aangevulde *Seriës* zal zijn,

$$1,\ 4\tfrac{17}{27},\ 12\tfrac{19}{27},\ 27,\ 49\tfrac{8}{27},\ 81\tfrac{10}{27},\ 125,\ 181\tfrac{26}{27},\ 254\tfrac{1}{27},\ 343$$

$$3\tfrac{17}{27},\ 8\tfrac{2}{27},\ 14\tfrac{8}{27},\ 22\tfrac{8}{27},\ 32\tfrac{2}{27},\ 43\tfrac{17}{27},\ 56\tfrac{26}{27},\ 72\tfrac{2}{27},\ 88\tfrac{26}{27}$$

$$4\tfrac{12}{27},\ 6\tfrac{6}{27},\ 8,\ 9\tfrac{21}{27},\ 11\tfrac{15}{27},\ 13\tfrac{9}{27},\ 15\tfrac{3}{27},\ 16\tfrac{24}{27}$$

$$1\tfrac{21}{27},\ 1\tfrac{21}{27},\ 1\tfrac{21}{27},\ 1\tfrac{21}{27},\ 1\tfrac{21}{27},\ 1\tfrac{21}{27},\ 1\tfrac{21}{27}$$

3. Om de 7de te vinden van de 9 Teerlingen, die tusschen 1 en 27 invallen; neme men $n = 1\frac{7}{10}$ en hierdoor heeft men

$$T = (2n-1)^3 = \left(\frac{24}{10}\right)^3 = \left(\frac{12}{5}\right)^3 = \frac{1728}{125} = 13\frac{103}{125}.$$

I. AANMERKING.

In de voorgaande Voorbeelden kan men duidelijk genoeg de algemeene handelwijze ontdekken, volgens welke alle *Arithmetische Seriën* kunnen *geinterpoleerd* worden. Men kan anders voor elke bijzondere soort derzelven ook wel bijzondere *Formulen*, of Regels, uit het voorgaande afleiden, zoo als men die bij eenige *Autheuren* vindt opgegeven. Voor de *Seriën*, welker eerste verschillen gelijk zijn, is dit niet noodig, en daarom zal ik alleen die gene nemen, welke gelijke tweede of derde verschillen hebben.

I. *Voor de Seriën, welker tweede verschillen gelijk zijn.*

De algemeene *Formule* voor den algemeenen Term is

$$T = A + (n\text{-}1)\,B + \frac{(n\text{-}1)\,(n\text{-}2)}{2}\,C.$$

Om nu de r^{de} term te vinden van de p termen, welke tusschen de m^{de} en $\overline{m+1}^{\,de}$ termen van de gegeven *Seriës* moet ingezet worden, heeft men $n = m + \frac{r}{p+1}$, of om dat de m^{de} term voor de eerste kan genomen worden, (zijnde nu A) kan men stellen $m = 1$, dus $n - 1 = \frac{r}{p+1}$ en derhalve heeft men voor het gene, dat bij A gevoegd moet worden.

$$X = \frac{r}{p+1} \times B + \frac{r}{p+1}\left(\frac{r}{p+1} - 1\right)\frac{C}{2} = \left(B + \frac{C}{2}\left(\frac{r}{p+1} - 1\right)\right) \times \frac{r}{p+1};$$

stellende dan $\frac{r}{p+1} = a$ en $a - 1 = b$, zoo is

$$X = \left(B + \tfrac{1}{2}\,b\,C\right) a,$$ zijnde de *Formule* van GARDINER.

Maar nemende p voor r en m voor $p+1$, zoodat $\frac{r}{p+1} = \frac{p}{m}$ en $\frac{r}{p+1} - 1 = \frac{p}{m} - 1 = \frac{p\text{-}m}{m}$ is, zoo heeft men

$$X = p \times \frac{B}{m} + p \times \frac{p\text{-}m}{2} \times \frac{C}{m^2}$$

$$\text{of } X = p \times \frac{B}{m} - p \times \frac{m\text{-}p}{2} \times \frac{C}{m^2},$$ zijnde de *Formule* van LA LANDE.

II. *Voor*

II. *Voor de Seriën, welker derde verschillen gelijk zijn.*

Voor deze is $T = A + (n-1)B + \frac{(n-1)(n-2)}{2}C + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\ 3.}D.$

Stellende derhalve, als boven, zoo is

$$X = \left(\dot{B} + \tfrac{1}{2}bC + \tfrac{1}{6}D(b^2 - b)\right)a,$$ volgens GARDINER.

en $X = p \times \frac{B}{m} - p \times \frac{m-p}{2} \times \frac{C}{m^2} + p \times \frac{(m-p)(2m-p)}{6} \times \frac{D}{m^3}$, volgens LA LANDE, in *Mem. de l'Ac.* 1761.

Doch door de toepasfing van deze bijzondere *Formulen* op eenige voorbeelden zal men bevinden, dat dezelve, over het algemeen, geen voordeel of gemak aanbrengen; weshalve wij een ieder aanraden, om zich liever bij de verklaarde algemeene handelwijze te houden, die, behalve hare algemeenheid, ook doorgaans de gemakkelijkfte is, gelijk in het vervolg blijken zal: terwijl men echter, in bijzondere gevallen, wanneer men vele gelijkfoortige berekeningen achter elkander te verrigten heeft, zoo als in de zamenftelling, bij voorbeeld, van *Astronomifche Ephemeriden*, vooraf al dat gene bepalen kan, hetwelk voor alle die berekeningen ftandvastig, of hetzelfde blijft. Ook kan men gemakkelijk, door deze zelfde handelwijze, *Hulptafelen* vervaardigen, waardoor dit foort van berekeningen dikwijls aanmerkelijk kan verkort worden, en waarvan men zich dus in het werkdadige met veel voordeels bedient: hoedanige Hulptafelen men vinden kan, onder N°. XI, XII en XIII, van de *Verzameling van Tafels*, behoorende tot de *Verhandeling over het bepalen der Lengte op Zee enz.* door den Hoogleeraar J. H. VAN SWINDEN, en bij meer andere Schrijvers; doch de grootfte en uitvoerigfte Tafelen van dien aard, voor zoo verre mij bekend is, zijn *A Sexagesimal Table &c. bij* MICHAEL TAYLOR, in 1780 uitgegeven te Londen, door de *Commissioners of Longitude.*

II. AANMERKING.

Men moet, bij het gebruik van deze handelwijze, wel onder het oog houden, dat wij altijd onderfteld hebben, dat de Termen van de

de gegevene *Seriës*, zoo wel als die van derzelver Verschillen, gedurig aanwassen, of dat B, C, D &c. oorspronkelijk alle als *affirmatief* zijn genomen; zoo dat men naauwkeurig acht moet geven op de gevallen, waarin deze grootheden B, C, D &c., of eenige derzelven, *negatief* mogten worden, om daarna de algemeene *Formule* voor T te bewerken; ten welken einde men best doet, om, bij de gedurige aftrekkingen, altijd de teekens + of — te stellen, zoo als vereischt wordt bij eene *Algebraïsche Subtractie.*

Ook heeft men, in de voorgaande Voorbeelden, zich enkel bepaald tot zuivere *Arithmetische Seriën*, welker verschillen, na eenige aftrekkingen, gelijk aan elkander worden, waardoor de *Interpolatie* dan ook volkomen heeft kunnen geschieden. Maar de Reeksen van getallen, die meest in de *Praktyk* voorkomen, om *geïnterpoleerd* te worden, zijn zelden van zulk eenen aard, en leveren meest altijd ongelijke verschillen op: doch het is, voor dezelfde *Praktyk*, genoegzaam en voldoende, om of de eerste, of de tweede, of de derde enz. dezer verschillen, als gelijk aantemerken, naar mate dezelve kleiner worden, en de naauwkeurigheid der berekening vordert; mits dan het gemiddelde van die verschillen nemende. In de meeste gevallen vergenoegt men zich met de eerste verschillen gelijk te nemen, of te stellen $T = A + (n-1)\,B$, of, dat hetzelfde is, alleen het proportionaal gedeelte te gebruiken; gelijk voor alles wat de Zon, en de meeste *Planeten* betreft; alsmede in het gebruik van de Driehoekstafelen en *Logarithmen:* hoewel men voor de *Tangens* en *Secans* van Bogen, die nabij de 90 graden komen, alsmede voor de *Logarithmen* der eerste 100 N°., niet wel deze onderstelling volgen kan, maar liever de tweede Verschillen en zelfs somtijds de derde, moet gelijk nemen en stellen $T = A\ (n-1)\ B + (n-1)\ (n-2)\frac{C}{2}$; welke *Formule* ook vooral voor de Maan moet gebruikt worden. Wij zullen tot opheldering van het een en ander hier eenige voorbeelden laten volgen.

I. VOORBEELD.

Gegeven zijnde de regte opklimmingen van de Maan te *Teneriffe* in A°. 1788, den

	A.	B.	C.	
2 Mei op Middernacht	5° 5'			
		+ 6° 13'		
3 —— op Middag	9. 18		+ 9'	
		6. 22		gemiddeld + 11'.
3 —— op Middernacht	15. 40		13	
		6. 35		
4 —— op Middag	22. 15			

Om nu te vinden de Maans regte Opklimming op den 3de *Mei* 1. ten 2 uren na den middag?

Nemende dan den 3de *Mei* op Middag als het begin of de eerste Term dezer *Seriës*, zoo is $A = 9^{\circ}\ 18'$, $B = +\ 6^{\circ}\ 22'$ en $C = +\ 11'$.

Voorts $n = 1\frac{2}{12} = 1\frac{1}{6}$: dus $n - 1 = \frac{1}{6}$ en $n - 2 = -\frac{5}{6}$.

$$\text{Derhalve } T = A + \frac{1}{6}\ B + \frac{1}{6} \times -\frac{5}{6} \times \frac{C}{2}$$

$$\text{of } T = A + \frac{1}{6}\ B - \frac{5}{72}\ C$$

Bijgevolg bij $A = 9^{\circ}\ 18'$

geteld $\frac{1}{6}$ van $6^{\circ}\ 22' = 1.\ 3.\ 40''$

$10.\ 21.\ 40''$

hier af $\frac{5}{72}$ van $11' =$ $46''$ nagenoeg

komt $10.\ 20.\ 54''$ voor de begeerde Regte Opklimming van de Maan ten 2 uren.

2. Om hetzelfde te vinden, 's avonds ten 10 uren?

Nu is $n = 1\frac{5}{6}$: dus $n - 1 = \frac{5}{6}$ en $n - 2 = -\frac{1}{6}$.

$$\text{Derhalve } T = A + \frac{5}{6}\ B - \frac{5}{72}\ C.$$

Bijgevolg bij A $= 9^\circ 18'$

geteld $\frac{5}{6}$ van $6^\circ 22' = 5.\ 18.\ 20''$

$14.\ 36.\ 20''$

hier af $\frac{5}{72}$ van $11' =$ $46''$ nagenoeg.

komt $14.\ 35.\ 34''$ voor de begeerde Regte Opklimming ten 10 uren des avonds.

BIJVOEGSEL.

Daar 10 uren des avonds even hetzelfde is, als 2 uren voor Middernacht en in dit geval de *Correctie* der tweede verschillen $-\frac{5}{72}$ C even groot is, als te voren voor 2 uren namiddag; zoo blijkt, dat op gelijke uren voor- en namiddag en voor- en namiddernacht de verbetering, die men uit hoofde der tweede verschillen in deze berekening moet aanbrengen, volmaakt dezelfde is; zoo als mede voor de Maans *Declinatie*, Lengte en Breedte en in het algemeen in alle gevallen plaats heeft, alwaar men de grootheden van 12 tot 12 uren bekend heeft: en dit is de reden, waarom de Verbeteringstafel voor de tweede verschillen niet verder dan tot 6 uren behoeft berekend te worden.

2. VOORBEELD.

Gegeven zijnde de Maans Lengte te *Greenwich* in A° 1780. den

	A.	B.	C.	
19 *Maart* op Middernacht	5ˢ. 21° 34′ 14″			
		+7° 29′ 8″		
20 —— op Middag	5. 29. 3. 22		−3′ 16″	−3′ 48″
		7. 25. 52		
20 —— op Middernacht	6. 6. 29. 14		4. 20	
		7. 21. 32		
21 —— op Middag	6. 13. 50. 46			

Men vraagt naar de Lengte den 20sten *Maart* 's avonds ten 8 u. 42′ 54″?

Hier is A = 5s 29° 3′ 22″
B = + 7. 25. 52
C = − 3. 48.

Voorts 8 u. 42′ 54″ = 8 u. 42′,9 = 8u,715 zijnde, zoo is

$$n = 1 + \frac{8,715}{12}: \text{ dus } n - 1 = \frac{8,715}{12} = \frac{2,905}{4}$$

$$\text{en } n - 2 = -\frac{3,285}{12} = -\frac{1,095}{4}$$

Bijgevolg A = 5s 29° 3′ 22″

$\frac{2,905}{4} \times B \ldots\ldots =$ 5. 23. 48,6

$\frac{2,9}{4} \times - \frac{1,1}{4} \times - 114'' =$ 22,8

komt 6. 4. 27. 33,4 voor het begeerde.

3. VOORBEELD.

De Maans Breedte te vinden te *Greenwich* den 14de *Augustus* 1798. 's morgens ten 6 uren?

	A.	B.	C.	
13 *Aug.* op Middag	4° 54′ 22″			
13 — op Middern.	4. 43. 36	− 10′ 46″	− 4. 52	
14 — op Middag	4. 27. 58	15. 38	4. 27	} − 4′ 39½″
14 — op Middern.	4. 7. 53	20. 5		

Hier is A = 4° 43′ 36″
B = − 15. 38
C = − 4. 39½

Voorts n = 1½ zijnde, is n − 1 = ½ en n − 2 = − ½

Dus A = 4° 43′ 36″
½ B = − 7. 49
4. 35. 47

$\frac{1}{2} \times - \frac{1}{2} \times \frac{C}{2} = +$ 35 nagenoeg

komt 4. 36. 22 de Maans N. Breedte.

4. VOORBEELD.

Gegeven zijnde de Maans ware Afſtanden van de Ster *Antares* te *Greenwich*, in 1798 den

	A.	B.	C.	D.	
11 Sept. op md.	61° 17′ 17″	— 7° 32′ 30″		(1. 15)	
— — op mn.	53. 44. 47	— 7. 28. 16	+ 4′ 14″	+ 1′ 10″	+ 1′ 7½″
12 — op md.	46. 16. 31	— 7. 22. 52	5. 24	1. 5	
— — op mn.	38. 53. 39	— 7. 16. 23	6. 29	(1. 0)	
13 — op md.	31. 37. 16				

Om tusſchen deze de Afſtanden van 3 tot 3 Uren te *interpoleren?*

Voor 3 U. namiddag of middernacht is $n = 1\frac{3}{12} = 1\frac{1}{4}$: dus $n - 1 = \frac{1}{4}$, $n - 2 = -\frac{3}{4}$ en $n - 3 = -\frac{7}{4}$: derhalve

$$T = A + \frac{1}{4} B - \frac{3}{32} C + \frac{7}{128} D.$$

Voor 6 U. namiddag of middernacht is $n = 1\frac{6}{12} = 1\frac{1}{2}$: dus $n - 1 = \frac{1}{2}$, $n - 2 = -\frac{1}{2}$ en $n - 3 = -\frac{3}{2}$: derhalve

$$T = A + \frac{1}{2} B - \frac{1}{8} C + \frac{1}{16} D.$$

Voor 9 U. na middag of middernacht is $n = 1\frac{9}{12} = 1\frac{3}{4}$: dus $n - 1 = \frac{3}{4}$, $n - 2 = -\frac{1}{4}$ en $n - 3 = -\frac{5}{4}$: derhalve

$$T = A + \frac{3}{4} B - \frac{3}{32} C + \frac{5}{128} D.$$

Als wij nu, in deze berekeningen, tot op de derde verſchillen willen acht geven, waarvan wij 'er maar twee, namelijk 1′ 10″ en 1′ 5″ bekend hebben, kunnen wij 'er ter wederzijde nog een bijvoegen, in eene *Arithmetiſche Progresſie* met de gegevene voortloopende, zijnde dan 1′ 15″ en 1′ 0″, zoo als wij dezelve, tusſchen de ( ) ſtaande, 'er bijgevoegd hebben.

1°. Om dan de Afſtanden van 3 tot 3 Uren intevullen, vooreerst, tus-

tusfchen die van 11 *Sept.* op middag en middernacht, zoo heeft men

A = 61° 17′ 17″
B = − 7. 32. 30
C = + 4. 14
D = + 1. 12,5; zijnde het gemiddelde van 1′ 15″ en 1′ 10″.

Derhalve A = 61° 17′ 17″
$\frac{1}{4}$ B = − 1. 53. 7,5
59. 24. 9,5
$\frac{3}{32}$ C = − 23,8
59. 23. 45,7
$\frac{7}{128}$ D = + 4,0
59. 23. 49,7 de Afftand ten 3 Uren.

Wederom A = 61° 17′ 17″
$\frac{1}{2}$ B = − 3. 46. 15
57. 31. 2
$\frac{1}{8}$ C = − 31,7
57. 30. 30,3
$\frac{1}{16}$ D = + 4,5
57. 30. 34,8 de Afftand ten 6 U.

Nog eens A = 61° 17′ 17′
$\frac{3}{4}$ B = − 5. 49. 22,5
55. 37. 54,5
$\frac{3}{32}$ C = − 23,8
55. 37. 30,7
$\frac{5}{128}$ D = + 2,8
55. 37. 33,5 de Afftand ten 9 U.

2°. Tusfchen 11 *Sept.* op middernacht en 12 *Sept.* op middag, is

A = 58° 44′ 47″
B = − 7. 28. 16
C = + 5. 24
D = + 1. 7½

Derhalve	A = 53° 44′ 47″	53° 44′ 47″	53° 44′ 47″
	$\frac{1}{4}$ B = − 1. 52. 4	$\frac{1}{2}$ B = − 3. 44. 8	$\frac{3}{4}$ B = − 5. 36. 12
	51. 52. 43	50. 0. 39	48. 8. 35
	$\frac{3}{32}$ C = − 30,4	$\frac{1}{8}$ C = − 40,5	$\frac{3}{32}$ C = − 30,4
	51. 52. 12,6	49. 59. 58,5	48. 8. 4,6
	$\frac{7}{128}$ D = + 3,7	$\frac{1}{16}$ D = + 4,2	$\frac{5}{128}$ D = + 2,6
	51. 52. 16,3	50. 0. 2,7	48. 8. 7,2
	ten 3 U.	ten 6 U.	ten 9 U.

3°. Tusschen 12 *Sept.* op middag en middernacht, is

A = 46° 16′ 31″
B = − 7. 22. 52
C = + 6. 29
D = + 1. 2,5

Derhalve	A = 46° 16′ 31″	46° 16′ 31″	46° 16′ 31″
	$\frac{1}{4}$ B = − 1. 50. 43	$\frac{1}{2}$ B = − 3. 41. 26	$\frac{3}{4}$ B = − 5. 32. 9
	44. 25. 48	42. 35. 5	40. 44. 22
	$\frac{3}{32}$ C = − 36,5	$\frac{1}{8}$ C = − 48,6	$\frac{3}{32}$ C = − 36,5
	44. 25. 11,5	42. 34. 16,4	40. 43. 45,5
	$\frac{7}{128}$ D = + 3,4	$\frac{1}{16}$ D = + 3,9	$\frac{5}{128}$ D = + 2,4
	44. 25. 14,9	42. 34. 20,3	40. 43. 47,9
	ten 3 U.	ten 6 U.	ten 9 U.

4°. Eindelijk, om de Afstanden te vinden tusschen den 12 *Sept.* op middernacht en den 13de op middag, dewijl men hiervoor geen tweede verschil, of C, bekend heeft, kan men de *Seriës* anders om nemen, namelijk aldus

	A.	B.	C.	D.
13 *Sept.* op midd.	31° 37′ 16″			
		+7° 16′ 23″		
12 —— op midn.	38. 53. 39		+6′ 29″	
		7. 22. 52		−1′ 5″
12 —— op midd.	46. 16. 31		5. 24	} −1′ 7½″
		7. 28. 16		−1. 10
11 —— op midn.	53. 44. 47		4. 14	
		7. 32. 30		
11 —— op midd.	61. 17. 17			

Waar-

Waaruit men dan heeft
A = 31° 37′ 16″
B = + 7. 16. 23
C = + 6. 29
D = − 1. 7,5

Dus A = 31° 37′ 16″	31° 37′ 16″	31° 37′ 16″
$\frac{1}{4}$B = + 1. 49. 5,7	$\frac{1}{2}$B = 3. 38. 11,5	$\frac{3}{4}$B = + 5. 27. 17,2
33. 26. 21,7	35. 15. 27,5	37. 4. 33,2
$\frac{3}{32}$C = − 36,5	$\frac{1}{8}$C = − 48,6	$\frac{3}{32}$C = − 36,5
33. 25. 45,2	35. 14. 38,9	37. 3. 56,7
$\frac{7}{128}$D = − 3,4	$\frac{1}{16}$D = − 3,9	$\frac{5}{128}$D = − 2,4
33. 25. 41,8	35. 14. 35	37 3. 54,3
ten 3 u. voor mn. of 9 u. na md.	ten 6 u. voor mn. of 6 u. na md.	ten 9 u. voor mn. of 3 u. na md.

Als wij nu alle deze gevondene Afstanden in orde stellen, verkrijgen wij de navolgende Tafel.

		1ste Verschillen.	2de Verschil.	3de Verschil.
11 *Sept.* op md.	61° 17′ 17″	− 1° 53′ 27″,3		
3 u.	59. 23. 49,7	1. 53. 14,9	− 12″,4	
6 u.	57. 30. 34,8	1. 53. 1,3	13,6	+ 1″,2
9 u.	55. 37. 33,5	1. 52. 46,5	14,8	1,2
11 *Sept.* op mn.	53. 44. 47	1. 52. 30,7	15,8	1,0
3 u.	51. 52. 16,3	1. 52. 13,6	17,1	1,3
6 u.	50. 0. 2,7	1. 51. 55,5	18,1	1,0
9 u.	48. 8. 7,2	1. 51. 36,2	19,3	1,2
12 *Sept.* op md.	46. 16. 31	1. 51. 16,1	20,1	0,8
3 u.	44. 25. 14,9	1. 50. 54,6	21,5	1,4
6 u.	42. 34. 30,3	1. 50. 32,4	22,2	0,7
9 u.	40. 43. 47,9	1. 50. 8,9	23,5	1,3
12 *Sept.* op mn.	38. 53. 39	1. 49. 44,7	24,2	0,7
3 u.	37. 3. 54,3	1. 49. 19,3	25,4	1,2
6 u.	35. 14. 35	1. 48. 53,2	26,1	0,7
9 u.	33. 25. 41,8	1. 48. 25,8	27,4	1,3
13 *Sept.* op md.	31. 37. 16			

waar-

waarin de derde verschillen alle nagenoeg even groot zijn en dus de ingevulde Afstanden met de gegevene in de vereischte orde staan.

BIJVOEGSEL.

Op deze wijze worden de Afstanden van de Maan tot de Zon en Sterren gevonden, zoo als men die dagelijks in de *Zeemans-Almanakken*, van 3 tot 3 uren geplaatst ziet, nadat men diezelfde Afstanden op middag en middernacht, of van 12 tot 12 uren, met de vereischte naauwkeurigheid, uit de oorspronkelijke Maans- en Zonstafelen, berekend heeft. Op die wijze kunnen ook de Maans-*declinatien geinterpoleerd* worden, zoo als men dezelve tegenwoordig jaarlijks in de *Conn. des Tems* aantreft. Bij TAIJLOR vindt men, in het aangehaalde Werk, eene bijzondere Tafel, om deze *Interpolatien* van 3 tot 3 uren nog gemakkelijker uittevoeren. Ook ziet men hieruit den oorsprong der *Formulen*, die voor deze berekening in de verklaring van den *Nautical Almanac* op bladz. 161 gevonden worden.

5. VOORBEELD.

Gegeven zijnde de *Logar. Sin.* van

	A.	B.	C.	
1° 0′	= 8,2418553			
		+ 71779		
1. 1	= 8,2490332		− 1168	
		70611		− 1149
1. 2	= 8,2560943		1130	
		69481		
1. 3	= 8,2630424			

1°. Om te vinden de *Log. Sin.* van 1° 1′ 40″.

Hier is $n = 1' 40' = 1\frac{2}{3}$: dus $n\text{-}1 = \frac{2}{3}$ en $n\text{-}2 = -\frac{1}{3}$:

daarom $T = A + \frac{2}{3} B - \frac{1}{9} C$. Derhalve $A = 8{,}2490332$

$\frac{2}{3} \times 70611 = + 47074$

$- \frac{1}{9} \times - 1149 = + 127$

komt 8,2537533 de begeerde

de *Log. Sin.* van 1° 1′ 40″, dat nu tot de laatste letter naauwkeurig is.

2°. Om te vinden de *Log. Sin.* van 1° 1′ 23″:

dan is $n = 1'23''$: dus $n\text{-}1 = \frac{23}{60}$ en $n\text{-}2 = -\frac{37}{60}$:

daarom $T = A + \frac{23}{60}B - \frac{851}{7200}C$. Derhalve $A = 8{,}2490332$

$$\frac{23}{60} \times 70611 = + \quad 27067{,}5$$

$$-\frac{851}{7200} \times -1149 = + \quad 135{,}8$$

komt 8,2517535 voor de *Log. Sin.* van 1° 1′ 23″, zijnde mede naauwkeurig tot in de laatste letter.

6. VOORBEELD.

Om de *Log.* van $2\frac{1}{4}$ te vinden?

1°. Nemende alleen het eerste verschil, of $T = A + (n\text{-}1)B$.

Log. 2 = 0,3010300	0,1760913
—— 3 = 0,4771213	

Nu is $n = 1\frac{1}{4}$: daarom $T = A + \frac{1}{4}B$. Derhalve $A = 0{,}3010300$

$\frac{1}{4}B = 0{,}0440228$

Dus zou 0,3450528 de Log. van $2\frac{1}{4}$ moeten zijn, waarvan dit echter zeer aanmerkelijk verschilt, zijnde *Log.* $2\frac{1}{4} = 0{,}3521825$.

2°. Nemende de tweede verschillen, of $T = A + (n\text{-}1)B + (n\text{-}1)(n\text{-}2)\frac{C}{2}$

Log. 1 = 0	0,3010300	— 0,1249387	— 880456
—— 2 = 0,3010300	0,1760913	0,0511526	
—— 3 = 0,4771213	0,1249387		
—— 4 = 0,6020600			

 Nu

Nu is wederom $n = 1\frac{1}{4}$: daarom $T = A + \frac{1}{4} B - \frac{3}{32} C$.

$$\text{Derhalve } A + \frac{1}{4} B = 0{,}3450528$$

$$- \frac{3}{32} C = + 82543$$

Dus zou 0,3533071 de *Log*. van $2\frac{1}{4}$ moeten zijn, komende veel nader dan de vorige.

3°. Nemende de derde verschillen,

$$\text{of } T = A + (n-1) B + \frac{(n-1)(n-2)}{2} C + \frac{(n-1)}{2.} \frac{(n-2)(n-3)}{3} D.$$

$$\text{dat is } T = A + \frac{1}{4} B - \frac{3}{32} C + \frac{7}{128} D.$$

Log. 1 = 0			
2 = 0,3010300	0,3010300	− 1249387	+ 737861 } + 484550
3 = 0,4771213	0,1760913	511526	231239 }
4 = 0,6020600	0,1249387	280287	
5 = 0,6989700	0,0969100		

$$\text{Derhalve } A + \frac{1}{4} B = 0{,}3450528$$

$$- \frac{3}{32} C = + 47956$$

$$\frac{7}{128} D = + 26499$$

Dus zou 0,3524983 de *Log*. van $2\frac{1}{4}$ moeten zijn, dat wel nader komt, maar echter nog te veel van de waarheid afwijkt: zoo dat men in dit en soortgelijke gevallen de gedurige verschillen nog veel verder zou moeten nemen.

III. AAN-

III. AANMERKING.

Dewijl in de algemeene *Formule*

$$T = A + (n-1)B + \frac{(n-1)(n-2)}{2}C + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3}D + \&c.$$

A beteekent den eerften Term zelf van de *Seriës*,
B — — — — — der eerfte Verfchillen,
C — — — — — — tweede ———,
D — — — — — — derde ———,
&c. &c.

zal men A altijd kunnen aanmerken als bekend te zijn, dewijl men een Reeks met een der Termen naar welgevalle kan ftellen te beginnen; maar, om B te bepalen, zal men twee Termen ten minften moeten bekend hebben; om C te vinden ten minften drie; om D te vinden ten minften vier enz. Derhalve, zoo het een Reeks is van eerfte gelijke verfchillen, zal het genoeg zijn, dat men twee Termen daarvan bekend hebbe, om alle andere Termen te vinden, door de *Formule*

$$T = A + (n-1)B.$$

Zoo het een Reeks is van tweede gelijke verfchillen, zal men drie Termen daarvan bekend moeten hebben, om de overige te berekenen, door de *Formule*

$$T = A + (n-1)B + \frac{(n-1)(n-2)}{2}C.$$

Zoo het een Reeks is van derde gelijke verfchillen, zal men ten minften vier Termen moeten weten, om de overige te bepalen, door de *Formule*

$$T = A + (n-1)B + \frac{(n-1)(n-2)}{2}C + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3}D:$$

en zoo voortgaande altijd één Term meer, dan de rang der gelijke verfchillen.

Als bijgevolg van eene Reeks het vereischte getal van Termen gegeven is, zoodanig dat deze Termen zich op gelijke afftanden van elkander bevinden, kan men door de voorgaande handelwijze gemak-

kelijk de waarde der *Coëfficienten* A, B, C &c. bepalen, en daardoor T vinden: maar als deze gegevene Termen op ongelijke afſtanden van elkander zijn, moet men in de *Formule* van T achtervolgelijk voor n en T hare gegevene waarden ſtellen, waardoor men zoo vele eenvoudige *Equatien* zal bekomen, als 'er grootheden A, B, C &c in T voor handen zijn, en waaruit vervolgens deze grootheden gemakkelijk kunnen bepaald worden; als in dit

VOORBEELD.

Alleen gegeven zijnde de drie *Trigonaal*-getallen, 1, 15 en 36, zijnde de 1ſte, 5de en 8ſte in orde, of de 1ſte, 5de en 8ſte Termen der *Seriës* van natuurlijk elkander opvolgende *Trigonalen;* zoo heeft men, ſtellende ſuccesſivelijk T = 1, 15, 36 en n = 1, 5, 8 uit de algemeene *Formule* $T = A + (n-1)B + \frac{(n-1)(n-2)}{2}C$

$$\begin{array}{r|l|l} 1 = A & & \\ 15 = A + 4B + 6C & 14 = 4B + 6C \quad \text{of} \quad 3\tfrac{1}{2} = B + 1\tfrac{1}{2}C & 3\tfrac{1}{2} = 3\tfrac{1}{2}C \\ 36 = A + 7B + 21C & 21 = 3B + 15C \quad\quad\; 7 = B + 5C & \end{array}$$

waaruit C = 1 en B = 2; welke waarden voor A, B en C in de plaats geſteld, heeft men voor den algemeenen Term der *Seriës*, waartoe deze getallen 1, 15, 36 behooren,

$$T = 1 + 2(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

of $T = 2n - 1 + \frac{n^2 - 3n + 2}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ even als te voren, en waardoor men nu verder alle andere Termen dezer *Seriës* kan vinden.

En op dezelfde wijze kan men handelen in andere bijzondere gevallen; doch wij zullen de zaak liever algemeen beſchouwen, in het volgend

DER-

DERDE ALGEMEEN VOORSTEL.

Gegeven zijnde eenige getallen a, b, c, d &c. behoorende tot een *Seriës*, welker verschillen eindelijk gelijk worden, om den algemeenen Term hiervan te bepalen?

OPLOSSING.

Stel de afstanden, welke de Termen a, b, c, d &c. succesſivelijk van elkander hebben, te zijn p, q, r &c.; dan heeft men,

voor $n = 1,\ p+1,\ p+q+1,\ p+q+r+1$ &c.
$T = a,\quad b,\quad c,\quad d,$ &c.

1. Als de eerste verschillen gelijk zijn, is bijgevolg in $T = A + (n-1) B$

$$a = A$$

en $b = A + pB$: dus $B = \frac{b-a}{p}$.

Derhalve $\mathfrak{A} = A = a$

en $\mathfrak{B} = \frac{b-a}{p}$ stellende, zoo is $T = \mathfrak{A} + (n-1)\mathfrak{B}$.

2. Als de tweede verschillen gelijk zijn, is in $T = A + (n-1)B + \frac{(n-1)(n-2)}{2} C$

$$a = A$$

$$b = A + pB + \frac{p(p-1)}{2} C$$

$$c = A + (p+q)B + \frac{(p+q)(p+q-1)}{2} C.$$

Dus $b - a = pB + \frac{p(p-1)}{2} C$ en $\frac{b-a}{p} = B + \frac{p-1}{2} C$

$c - b = qB + \frac{q(2p+q-1)}{2} C$ en $\frac{c-b}{q} = B + \frac{2p+q-1}{2} C$

stellende wederom $\mathfrak{A} = a$, $\mathfrak{B} = \frac{b-a}{p}$ en $\overset{1}{\mathfrak{B}} = \frac{c-b}{q}$

zoo is $\mathfrak{B}=B+\frac{p-1}{2}C$

$$\overset{1}{\mathfrak{B}}=B+\frac{2p+q-1}{2}C$$

$$\overset{1}{\mathfrak{B}}-\mathfrak{B}=\frac{p+q}{2}C \text{ of } \frac{C}{2}=\frac{\overset{1}{\mathfrak{B}}-\mathfrak{B}}{p+q}$$

ſtellende $\frac{\overset{1}{\mathfrak{B}}-\mathfrak{B}}{p+q}=\mathfrak{C}$; zoo is $T=\mathfrak{A}+(n-1)B+(n-1)(n-2)\mathfrak{C}$

Maar $B=\mathfrak{B}-(p-1)\mathfrak{C}$:

dus $(n-1)B=(n-1)\mathfrak{B}+(n-1)(1-p)\mathfrak{C}$:

daarom $T=\mathfrak{A}+(n-1)\mathfrak{B}+(n-1)(n-1-p)\mathfrak{C}$.

3. De derde verſchillen gelijk zijnde, is in

$$T=A+(n-1)B+\frac{(n-1)(n-2)}{2}C+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\ 3}D$$

$a=A$

$b=A+pB+\frac{p(p-1)}{2}C+\frac{p(p-1)(p-2)}{2.\ 3}D$

$c=A+(p+q)B+\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}C+\frac{(p+q)(p+q-1)(p+q-2)}{2.\ 3}D$

$d=A+(p+q+r)B+\frac{(p+q+r)(p+q+r-1)}{2}C+\frac{(p+q+r)(p+q+r-1)(p+q+r-2)}{2.\ 3}D$

of ſtellende, om te verkorten, $\alpha=p-1$ en $\beta=p-2$; zoo is

$a=A$

$b=A+pB+\frac{p\alpha}{2}C+\frac{p\alpha\beta}{2.\ 3}D$

$c=A+(p+q)B+\frac{(p+q)(\alpha+q)}{2}C+\frac{(p+q)(\alpha+q)(\beta+q)}{2.\ 3}D$

$d=A+(p+q+r)B+\frac{(p+q+r)(\alpha+q+r)}{2}C+\frac{(p+q+r)(\alpha+q+r)(\beta+q+r)}{2.\ 3.}D$

Der-

Derhalve is door aftrekking

$$b-a=pB+\frac{p\alpha}{2}C+\frac{p\alpha\beta}{2.\,3}D$$

$$c-b=qB+q\times\frac{q+p+\alpha}{2}C+q\times\frac{q^2+q(p+\alpha+\beta)+p\alpha+p\beta+\alpha\beta}{2.\,3}D$$

$$d-c=rB+r\times\frac{r+2q+p+\alpha}{2}C+r\times\frac{r^2+3qr+3q^2+(r+2q)(p+\alpha+\beta)+p\alpha+p\beta+\alpha\beta}{2.\,3}D.$$

En vervolgens door deeling

$$\mathfrak{B}=\frac{b-a}{p}=B+\frac{\alpha}{2}C+\frac{\alpha\beta}{2.\,3}D$$

$$\overset{I}{\mathfrak{B}}=\frac{c-b}{q}=B+\frac{q+p+\alpha}{2}C+\frac{q^2+q(p+\alpha+\beta)+p\alpha+p\beta+\alpha\beta}{2.\,3}D$$

$$\overset{II}{\mathfrak{B}}=\frac{d-c}{r}=B+\frac{r+2q+p+\alpha}{2}C+\frac{r^2+3qr+3q^2+(r+2q)(p+\alpha+\beta)+p\alpha+p\beta+\alpha\beta}{2.\,3}D.$$

Hieruit heeft men wederom

$$\overset{I}{\mathfrak{B}}-\mathfrak{B}=\frac{p+q}{2}C+\frac{q^2+q(p+\alpha+\beta)+p\alpha+p\beta}{2.\,3.}D$$

$$\overset{II}{\mathfrak{B}}-\overset{I}{\mathfrak{B}}=\frac{r+q}{2}C+\frac{r^2+3qr+2q^2+(r+q)(p+\alpha+\beta)}{2.\,3}D.$$

En vervolgens

$$\mathfrak{C}=\frac{\overset{I}{\mathfrak{B}}-\mathfrak{B}}{p+q}=\tfrac{1}{2}C+\frac{q+\alpha+\beta}{2.\,3}D$$

$$\overset{I}{\mathfrak{C}}=\frac{\overset{II}{\mathfrak{B}}-\overset{I}{\mathfrak{B}}}{q+r}=\tfrac{1}{2}C+\frac{r+2q+p+\alpha+\beta}{2.\,3}D.$$

Derhalve $\overset{I}{\mathfrak{C}}-\mathfrak{C}=\frac{r+q+p}{2.\,3}D$

en $\frac{D}{2.\,3}=\frac{\overset{I}{\mathfrak{C}}-\mathfrak{C}}{p+q+r}=\mathfrak{D}.$

Bijgevolg hebben wij $\frac{D}{2.\,3}=\mathfrak{D}$

$$\frac{C}{2}=\mathfrak{C}-\frac{q+\alpha+\beta}{2.\,3}D=\mathfrak{C}-(q+\alpha+\beta)\mathfrak{D}$$

$$B=\mathfrak{B}-\frac{\alpha}{2}C-\frac{\alpha\beta}{2.\,3}D=\mathfrak{B}-\alpha\mathfrak{C}+\alpha(q+\alpha)\mathfrak{D}.$$

Daarom $A=\mathfrak{A}$

$$(n-1)\,B=(n-1)\mathfrak{B}-(n-1)\alpha\mathfrak{C}+(n-1)\alpha(q+\alpha)\mathfrak{D}.$$

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}C=(n-1)(n-2)\mathfrak{C}-(n-1)(n-2)(q+\alpha+\beta)\mathfrak{D}$$

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\,3}D=(n-1)(n-2)(n-3)\mathfrak{D}.$$

en $T=\mathfrak{A}+(n-1)\mathfrak{B}+(n-1)(n-2-\alpha)\mathfrak{C}+(n-1)(n-2-\alpha)(n-2-\alpha-q)\mathfrak{D}$

of $T=\mathfrak{A}+(n-1)\mathfrak{B}+(n-1)(n-1-p)\mathfrak{C}+(n-1)(n-1-p)(n-1-p-q)\mathfrak{D}.$

Hieruit is de algemeene Regel blijkbaar.

Neem $\mathfrak{A}=a,\ \mathfrak{B}=\frac{b-a}{p}$

$$\overset{I}{\mathfrak{B}}=\frac{c-b}{q} \qquad \overset{II}{\mathfrak{B}}=\frac{d-c}{r} \qquad \overset{III}{\mathfrak{B}}=\frac{e-d}{s}$$

$$\frac{\overset{I}{\mathfrak{B}}-\mathfrak{B}}{p+q}=\mathfrak{C} \qquad \frac{\overset{II}{\mathfrak{B}}-\overset{I}{\mathfrak{B}}}{q+r}=\overset{I}{\mathfrak{C}} \qquad \frac{\overset{III}{\mathfrak{B}}-\overset{II}{\mathfrak{B}}}{r+s}=\overset{II}{\mathfrak{C}}$$

$$\frac{\overset{I}{\mathfrak{C}}-\mathfrak{C}}{p+q+r}=\mathfrak{D} \qquad \frac{\overset{II}{\mathfrak{C}}-\overset{I}{\mathfrak{C}}}{q+r+s}=\overset{I}{\mathfrak{D}}$$

$$\frac{\overset{I}{\mathfrak{D}}-\mathfrak{D}}{p+q+r+s}=\mathfrak{E}$$

&c. &c.

Zoo is algemeen $T=\mathfrak{A}+(n-1)\mathfrak{B}+(n-1)(n-1-p)\mathfrak{C}+$
$(n-1)(n-1-p)(n-1-p-q)\mathfrak{D}+(n-1)(n-1-p)(n-1-p-q)(n-1-p-q-r)\mathfrak{E}$ &c.

Dat te vinden was.

1. VOORBEELD.

1 . . . . . 5 . . . . . 8 Termen.
Gegeven zijnde 1 . . . . . 15 36

zijnde de 1ste, 5de en 8ste Termen van de *Series* der *Trigonalen*; zoo is $p=4$ en $q=3$. Voorts $a=1$, $b=15$ en $c=36$.

Bijgevolg $T=\mathfrak{A}+(n-1)\mathfrak{B}+(n-1)(n-5)\mathfrak{C}$.

Maar $\mathfrak{A}=1$, $\mathfrak{B}=\frac{14}{4}=3\frac{1}{2}$, $\overset{1}{\mathfrak{B}}=\frac{21}{3}=7$ | $\mathfrak{C}=\frac{3\frac{1}{2}}{7}=\frac{1}{2}$

Derhalve $T=1+3\frac{1}{2}(n-1)+\frac{1}{2}(n-1)(n-5)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Men kan de bewerking gemakkelijkst in dezer voege ftellen,

1 . . . . 5 8
1 . . . . 15 36

$p=4)\frac{14}{3\frac{1}{2}}$ . . . . $q=3)\frac{21}{7}$

$p+q=7)\frac{3\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$

Dus $T=1+3\frac{1}{2}(n-1)+\frac{1}{2}(n-1)(n-5)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$.

2. VOORBEELD.

1 . . . . 4 . . . . 10 Termen.
Gegeven 1 . . . . 16 100

$3)\frac{15}{5}$ . . . . $6)\frac{84}{14}$

$9)\frac{9}{1}$

Derhalve $T=1+5(n-1)+(n-1)(n-4)=5n+4+n^2-5n-4=n^2$.

 3. VOOR-

3. VOORBEELD.

	1	3, 4	7 Termen.
Gegeven	1	10, 20	84

$2)\frac{9}{4\frac{1}{2}} \;\dots\; 1)\frac{10}{10} \;\dots\; 3)\frac{64}{21\frac{1}{3}}$

$3)\frac{5\frac{1}{2}}{1\frac{5}{6}} \;\dots\; 4)\frac{11\frac{1}{3}}{2\frac{5}{6}}$

$6)\frac{1}{\frac{1}{6}}$

Dus $T = 1 + 4\frac{1}{2}(n-1) + 1\frac{5}{6}(n-1)(n-3) + \frac{1}{6}(n-1)(n-3)(n-4)$

of $T = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2.\ 3}$

4. VOORBEELD.

	1 2	4	6, 7 Termen	
Gegeven	5, 15	70	210, 330	

$1)\frac{10}{10} \;\dots\; 2)\frac{55}{27\frac{1}{2}} \;\dots\; 2)\frac{140}{70} \;\dots\; 1)\frac{120}{120}$

$3)\frac{17\frac{1}{2}}{5\frac{5}{6}} \;\dots\; 4)\frac{42\frac{1}{2}}{10\frac{5}{8}} \;\dots\; 3)\frac{50}{16\frac{2}{3}}$

$5)\frac{4\frac{19}{24}}{\frac{23}{24}} \;\dots\; 5)\frac{6\frac{1}{24}}{1\frac{5}{24}}$

$6)\frac{\frac{6}{24}}{\frac{1}{24}}$

Bijgevolg is

$T = 5 + 10(n-1) + 5\frac{5}{6}(n-1)(n-2) + \frac{23}{24}(n-1)(n-2)(n-4) + \frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n-4)(n-6)$

of $T = \frac{n^4 + 10n^3 + 35n^2 + 50n + 24}{24} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.\ 3.\ 4.}$

Laat

Laat n = 0 zijn, dan is $T = \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4}{2.\ 3.\ 4} = 1$

$n = 3$ — — — $T = \frac{4.\ 5.\ 6.\ 7}{2.\ 3.\ 4} = 5.\ 7 = 35$

$n = 5$ — — — $T = \frac{6.\ 7.\ 8.\ 9}{2.\ 3.\ 4} = 7.\ 2.\ 9 = 126$

Waardoor nu de *Seriës* aangevuld kan worden, zijnde bijgevolg

1, 5, 15, 35, 70, 126, 210, 330 &c.

N. B. Als men 5 voor den tweeden Term neemt, zoo als hij eigenlijk is, zou men hebben (n - 1 in plaats van n stellende)

$$T = \frac{n(n+1)\ (n+2)\ (n+3)}{2.\ \ 3.\ \ 4}$$

zijnde de *Formule* voor de *Pyramidaal*-getallen, even als te voren op *bladz.* 19.

AANMERKING.

Uit deze Voorbeelden blijkt dan klaar genoeg, hoe men eene Reeks kan aanvullen of *interpoleren*, als derzelver eerste, tweede, derde enz. verschillen aan elkander gelijk zijn, mits men van dezelve één term meer, dan de rang is der gelijke verschillen, bekend hebbe, op welken afstand van elkander deze bekende termen ook geplaatst mogen zijn. Maar in het werkdadige der Wiskunst komen meestal Reeksen van Getallen voor, welker verschillen niet, strikt genomen, aan elkander gelijk worden; doch die men echter als zoodanig kan beschouwen, mits men deze verschillen zoo lang neme, tot dat ze zeer klein zijn. Als men dan maar twee getallen gegeven heeft, kan men niets anders doen, dan het eerste verschil terstond als gelijk, of standvastig, te beschouwen; het gene dan op hetzelfde uitkomt, als de gewone handelwijze, om tusschen twee grootheden een gegeven aantal van *Arithmetisch* Middenevenredigen te vinden: en in dit geval heeft men alleen te nemen $T = \mathfrak{A} + (n\text{-}1)\mathfrak{B}$. Doch als 'er drie Getallen gegeven zijn, moet

 men

men de tweede verschillen als gelijk aanmerken, en nemen

$$T = \mathfrak{A} + (n\text{-}1)\,\mathfrak{B} + (n\text{-}1)(n\text{-}1\text{-}p)\,\mathfrak{C}.$$

Voor vier Getallen kan men de derde verschillen gelijk nemen, en stellen

$$T = \mathfrak{A} + (n\text{-}1)\,\mathfrak{B} + (n\text{-}1)(n\text{-}1\text{-}p)\,\mathfrak{C} + (n\text{-}1)(n\text{-}1\text{-}p)(n\text{-}1\text{-}p\text{-}q)\,\mathfrak{D}.$$

En zoo vervolgens. Waaruit volgt dat, hoe meerder Getallen a, b, c &c. gegeven zijn, met zoo veel te meer naauwkeurigheid kan men dezelven tot eene *Arithmetische Seriës* brengen, en *interpoleren*. Hiertoe behoren de volgende Voorbeelden.

I. VOORBEELD.

Gegeven zijnde de *Logarithmen* van 500, 504 en 505, om te vinden die van 501, 502 en 503?

1	5	6
2.6989700,0	2.7024305,4	2,7032913,8

$$p = 4)\frac{34605{,}4}{8651{,}35} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; q = 1)\frac{8608{,}4}{8608{,}4}$$

$$p + q = 5)\frac{-\,42{,}95}{-\;\;8{,}59}$$

Derhalve $T = 2{,}6989700 + (n\text{-}1)\,8651{,}35 - (n\text{-}1)(n\text{-}5)\,8{,}59$

Nemende n = 2	3	4
2,6989700	2,6989700	2,6989700
8651,35	17302,7	25954,05
25,77	34,36	25,77
Log. 501 = 2,6998377	*Log*. 502 = 2,7007037	*Log*. 503 = 2,7015680

Waaruit blijkt, dat, om de *Logarithmen* te *interpoleren* omstreeks 500, men ten minsten de tweede verschillen moet nemen.

2. VOOR-

2. VOORBEELD.

Gegeven zijnde de *Logarithmen* van 100, 105, 106 en 107, om te vinden die van 101, 102, 103 en 104?

1	6	7	8
2.0000000	2.0211893	2.0253058,7	2.0293837,8

$$p=5)\frac{211893}{42378,6} \quad q=1)\frac{41165,7}{41165,7} \quad r=1)\frac{40779,1}{40779,1}$$

$$p+q=6)\frac{-1212,9}{-202,15} \quad q+r=2)\frac{-386,6}{-193,3}$$

$$p+q+r=7)\frac{+\ 8,85}{+\ 1,264}$$

Dus $T = \mathfrak{A} + (n-1)\mathfrak{B} + (n-1)(n-6)\mathfrak{C} + (n-1)(n-6)(n-7)\mathfrak{D}$.

Dat is $T = 2.0000000 + (n-1)\ 42378,6 + (n-1)(n-6) \times -202,15 + (n-1)(n-6)(n-7)\ 1,264$

Nemende n = 2 3

n = 2	n = 3
2.0000000	2.0000000
42378,6	84757,2
808,6	1212,9
25,3	30,3
Log. 101 = 2.0043212	*Log.* 102 = 2.0086000

Nemende n = 4 5

n = 4	n = 5
2.0000000	2.0000000
127135,8	169514,4
1212,9	808,6
22,7	10,1
Log. 103 = 2.0128371	*Log.* 104 = 2.0170333

Van deze verschillen sommige nog 1 in de laatste letter van de ware *Logarithmen;* waaruit men ziet, dat, om de *Logarithmen* te *interpoleren* van getallen omstreeks 100 en daar beneden, ten minste de vierde verschillen moeten genomen worden, om tot 7 getalmerken in de breuk naauwkeurig te blijven.

3. VOORBEELD.

Gegeven zijnde de Afftanden eener Komeet van de Zon des nachts ten 12 uren, op de volgende dagen

12 *December* = 301
21 — — = 629
24 — — = 715
en 26 — — = 772

Om den Afftand te vinden op middernacht van den 20sten?

Dagen	12	21	24	26
Afftanden	301	620	715	772

$9)\frac{319}{35\frac{4}{9}}$ ...... $3)\frac{95}{31\frac{2}{3}}$ ...... $2)\frac{57}{28\frac{1}{2}}$

$12)\frac{-3\frac{7}{9}}{-\frac{17}{54}}$ ...... $5)\frac{-3\frac{1}{6}}{-\frac{19}{30}}$

$14)\frac{-\frac{43}{135}}{-\frac{43}{1890}}$

Derhalve $T = 301 + 35\frac{4}{9}(n-1) - \frac{17}{54}(n-1)(n-10) - \frac{43}{1890}(n-1)(n-10)(n-13)$

of voor $n = 9$

is $T = 301 + 35\frac{4}{9} \times 8 + \frac{17}{54} \times 8 - \frac{43}{1890} \times 8 \times 4$

of $T = 301 + 283\frac{5}{9} + 2\frac{14}{27} - \frac{688}{945} = 586\frac{109}{315}$ de begeerde Afftand.

4. VOORBEELD.

Gegeven zijnde de 5 volgende Waarnemingen van een Komeet,

den 3 *November*	ten 17 u.	in Leo	29° 51′
5 — —	— 15 —	in Virgo	3. 23
10 — —	— 16 —	— —	15. 32
18 — —	— 21 —	in Libra	18. 52
20 — —	— 17 —	— —	28. 10

om deszelfs plaats te vinden, den 16de *Nov.* ten 17 Uren?

Breng

Breng de Uren tot tiendeeligen van Dagen, en de Minuten tot tiendeeligen van Graden; dan heeft men

3,708 . . . . . 5,625 . . . . . 10,667 . . . . . 18,875 20,708
29,85 . . . . . 33,383 . . . . . 45,54 . . . . . 78,867 88,167

$$1{,}917)\frac{3{,}533}{1{,}84} \;\cdots\; 5{,}042)\frac{12{,}157}{2{,}41} \;\cdots\; 8{,}208)\frac{33{,}327}{4{,}06} \;\cdots\; 1{,}833)\frac{9{,}3}{5{,}07}$$

$$6{,}959)\frac{0{,}57}{0{,}08} \;\cdots\; 13{,}25)\frac{1{,}65}{0{,}12} \;\cdots\; 10{,}041)\frac{1{,}01}{0{,}1}$$

$$15{,}167)\frac{0{,}04}{0{,}003} \;\cdots\; 15{,}083)\frac{-\,0{,}02}{-\,0{,}001}$$

$$17)\frac{-\,0{,}004}{-\,0{,}00024}$$

Derhalve $T = 29^{\circ}{,}85 + 1{,}84\,(n-1) + 0{,}08\,(n-1)\,(n-2{,}917) + 0{,}003\,(n-1)\,(n-2{,}917)\,(n-7{,}959)$
$- 0{,}00024\,(n-1)\,(n-2{,}917)\,(n-7{,}959)\,(n-16{,}167)$

Maar nu is $n = 14$, dus $n - 1 = 13$

$$n - 2{,}917 = 11{,}083$$
$$n - 7{,}959 = 6{,}041$$
$$n - 16{,}167 = -2{,}167$$

Bijgevolg $T = 29^{\circ}{,}85$
$+ 23{,}92$
$+ 11{,}53$
$+ 2{,}62$
$+ 0{,}45$

of $T = 68{,}37 = 68^{\circ}\,22'$ nagenoeg, dat is $8^{\circ}\,22'$ in *Libra*.

I. GEVOLG.

Als men ftelt $p = q = r$ enz. of de Getallen a, b, c, d &c. alle op gelijke afftanden van elkander, verandert de algemeene *Formule* in

$$T = \mathfrak{A} + (n-1)\mathfrak{B} + (n-1)(n-1-p)\mathfrak{C} + (n-1)(n-1-p)(n-1-2p)\mathfrak{D} + (n-1)(n-1-p)(n-1-2p)(n-1-3p)\mathfrak{E} + \&c.$$

Of, om dat men als dan $p = 1$ kan ftellen, in

$$T = \mathfrak{A} + (n-1)\mathfrak{B} + (n-1)(n-2)\mathfrak{C} + (n-1)(n-2)(n-3)\mathfrak{D} + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\mathfrak{E} + \&c.$$

zijnde dezelfde met die van het *Eerfte Voorftel.*

II. GE-

II. GEVOLG.

Men kan ook al het voorgaande omkeeren: namelijk, de vereischte Termen van eene *Arithmetische Seriës* gegeven zijnde, om te vinden welk een plaats een gegeven Term daarin beslaat, of hoever dezelve van den eersten Term verwijderd is; want in de algemeene *Equatie* van

$$T = A + (n-1)B + (n-1)(n-2)\tfrac{1}{2}C + \&c.$$

nu alles, behalven n, bekend zijnde, zal men n kunnen bepalen, door eene *Equatie* van zoo vele afmetingen, als de rang is der gelijke verschillen, of anders, als 'er Getallen min één van de *Seriës* gegeven zijn.

1. VOORBEELD.

Om te vinden het hoemenigste der elkander in orde opvolgende *Trigonalen* het getal 5565 is?

De algemeene *Formule* hier zijnde

$$T = \frac{n^2 + n}{2}$$

Zoo heeft men $n^2 + n = 2T = 11130$

hierbij $\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}$

dan is $n^2 + n + \tfrac{1}{4} = 11130\tfrac{1}{4}$

$n + \tfrac{1}{2} = 105\tfrac{1}{2}$

dus $n = 105$ of de 105de Term.

2. VOORBEELD.

Men vraagt of eenige Termen, en welke dan, ook kunnen nul worden, in de *Seriës* der Getallen 4, 5, 4, 2 &c. welke behooren tot de *Formule* $T = \frac{n(n-5)(n-7)}{6}$?

De-

Dewijl hier $T = o$ is, zoo is ook $n\ (n-5)\ (n-7) = o$

en dus of $n = o$, of $n-5 = o$, of $n-7 = o$.

dat is $n = o$, of $n = 5$, of $n = 7$

zoo dat de Term voor de eerste, benevens de 5[de] en 7[de] Termen, alle drie nul zijn. Zie het 5[de] *Voorbeeld bladz.* 9.

3. VOORBEELD.

Gegeven zijnde de Zons *Declinatie*, in 1798 den

18 *Maart* = 43′ 52″ N.

19 —— = 20. 9

en 21 —— = 27. 17 Z.

Vrage, wanneer zal de Zon in den *Equator* zijn, of geen *Declinatie* hebben?

$$\begin{array}{ccc} 18 & 19 & 21 \\ 43' \ 52'' \ldots\ldots & 20' \ 9'' \ldots\ldots & -27' \ 14''. \end{array}$$

$$1)\frac{-23' \ 43''}{-23. \ 43} \qquad 2)\frac{-47' \ 23''}{-23. \ 41\tfrac{1}{2}}$$

gemiddeld — 23. 42 = −23′,7

Derhalve is $A = 43' \ 52'' = 43{,}867$ en $B = -23{,}7$

Dus $T = A + (n-1)\,B = o$

$$\text{dat is } n-1 = -\frac{A}{B} = \frac{43{,}867}{23{,}7} = 1{,}851$$

of $n = 2{,}851$ = 2 dagen 20 uren 25 min.

En dus de Zon in den *Equator* den 20[sten] *Maart* 's morgens ten 8 uren 25 minuten.

III. GEVOLG.

Zoo de gegevene *Seriës* voor een *Maximum* of *Minimum* vatbaar is, kan men den Term n, alwaar zulks plaats heeft, vinden, door de *Differentiaal* van T, den algemeenen Term, gelijk aan o te stellen, en uit deze *Equatie* de waarde van n afteleiden.

Indien de eerste verschillen gelijk zijn, of de Seriës eene gewone *Arithmetische Progressie* is, heeft men $T = A + (n-1)B$

derhalve $B\,dn = 0$

dus ook $n = 0$:

weshalve hierin geen grootste of kleinste kan vallen, gelijk van zelf bekend is.

Indien de tweede verschillen gelijk zijn, heeft men

$$T = A + (n-1)B + \frac{(n-1)(n-2)}{2}C$$

Derhalve $B\,dn + nC\,dn - 1\tfrac{1}{2}C\,dn = 0$

en hieruit $n = \frac{3C - 2B}{2C}$.

1. VOORBEELD.

De kleinste van alle *Trigonalen* te vinden?

De algemeene *Formule* is $T = \frac{n^2 + n}{2}$:

bijgevolg $2n\,dn + dn = 0$

of $n = -\frac{1}{2}$ en $T = -\frac{1}{8}$

2. VOORBEELD.

Om te vinden, wanneer de Zon hare grootste *Declinatie* heeft, in *December* 1798, te *Greenwich*?

20 December	23° 27′ 43″				
		+ 15″			
21 —— ——	23. 27. 58				
			− 28″		
		− 13		} − 28½″ gemiddeld.	
22 —— ——	23. 27. 45				
			− 29		
		− 42			
23 —— ——	23. 27. 3				

Derhalve is $B = +15$ en $C = -28\tfrac{1}{2}$: dus $n = \frac{-85\tfrac{1}{2} - 30}{-57} = \frac{115\tfrac{1}{2}}{57}$

dat is, $n = 2\tfrac{1}{38}$ = 2 d. 0 u. 40′

of

of de Zon heeft hare grootste Zuider *Declinatie*, den 21 *Dec.* omtrent 40' nadenmiddag, zijnde dezelve

$$T = 23^\circ\ 27'\ 43'' + 1\tfrac{1}{33} \times 15' - 1\tfrac{1}{33} \times \tfrac{1}{33} \times 14''$$
$$\text{of } 23^\circ\ 27'\ 43'' + 15'',4 - 0,4 = 23^\circ\ 27'\ 58''.$$

I. AANMERKING.

Hieruit blijkt, dat in eene *Seriës*, welker tweede verschillen gelijk zijn, alleen maar één *Maximum* of *Minimum* kan plaats hebben, en dat, ter wederzijde van dezen allergrootsten of allerkleinsten Term, de volgende Termen tot in het oneindige blijven aanwassen of verminderen.

Bij voorbeeld: 1°. stellende $C = -2$ en $B = 3$, zoo is $n = \frac{3C - 2B}{2C} = 3$, en $T = A + (n\text{-}1)\,B + (n\text{-}1)\,(n\text{-}2)\,\tfrac{1}{2}\,C$

of $T = A + 3n\text{-}3 - n^2 + 3n\text{-}2 = A - n^2 + 6n\text{-}5$

Nemende dan $A = 5$; zoo wordt $T = 6n - n^2 = n\,(6\text{-}n)$ de allergrootste, zijnde de derde Term van de *Seriës:* aldus

n =..... &c.- 5,- 4,- 3,- 2,-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 &c.
T =..... &c.-55,-40,-27,-16,-7, 0, 5, 8, 9, 8, 5, 0,-7,-16 &c.

waarvan 9 de grootste en middelste Term is.

2°. Stellende $C = 2$ en $B = -7$, zoo is $n = \frac{3C - 2B}{2C} = 5$ en

$$T = A + n^2 - 10n + 9.$$

Nemende dan $A = 1$, zoo wordt $T = n\,(n\text{-}10) + 10$ de kleinste Term van de *Seriës*, zijnde nu de vijfde: aldus

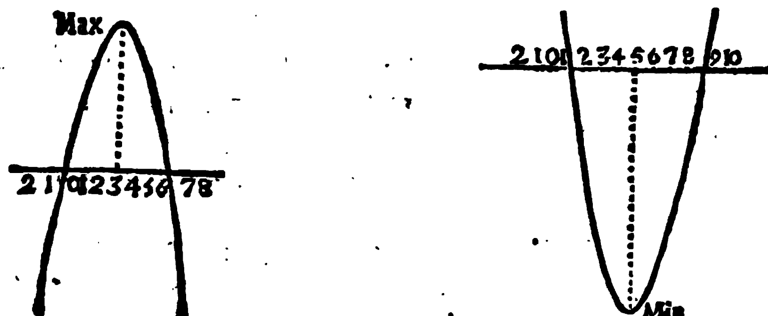
n =..... &c. -2,-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 &c.
T =..... &c. 34, 21, 10, 1,-6,-11,-14,-15,-14,-11,-6, 1, 10 &c.

waarvan -15 de kleinste en middelste Term is.

Ook hebben deze *Seriës* $T = 0$ op twee plaatsen, of voor twee waarden van n; hetwelk te kennen geeft, dat de *Seriës* op twee plaatsen afbreekt, of de Termen daarvan van *Affirmatief* worden *Negatief* en omgekeerd.

Nog blijkt hieruit gemakkelijk, dat, bijaldien $n = \frac{3C - 2B}{2C}$ geen geheel getal is, het grootfte of kleinfte niet juist onder de Termen der gegevene *Seriës*, maar tusfchen twee van dezelve zal invallen: als in het 1ste en 2de Voorbeeld.

De volgende kromme Lijnen toonen den loop der voorgaande getallen voor het oog aan.



II. AANMERKING.

Op dezelfde wijze kan men handelen met de *Arithmetifche Seriën*, welker derde verfchillen alle gelijk zijn, waarin één *Maximum* en één *Mininum* plaats hebben, en de verdere Termen naar buiten, of alle tot in het oneindige aanwasfen, of verminderen,

Laat, bij voorbeeld, gegeven zijn eene *Seriës*, waarvan de algemeene Term is $T = \frac{n(n-6)^2}{2} = \frac{n^3 - 12n^2 + 36n}{2}$

$$\text{zoo is } 3n^2dn - 24ndn + 36dn = 0$$

$$3dn\,)\ \text{of } n^2 - 8n + 12 = 0$$

$$4 = 4$$

$$\sqrt{n^2 - 8n + 16} = 4$$

$$n - 4 = \pm 2$$

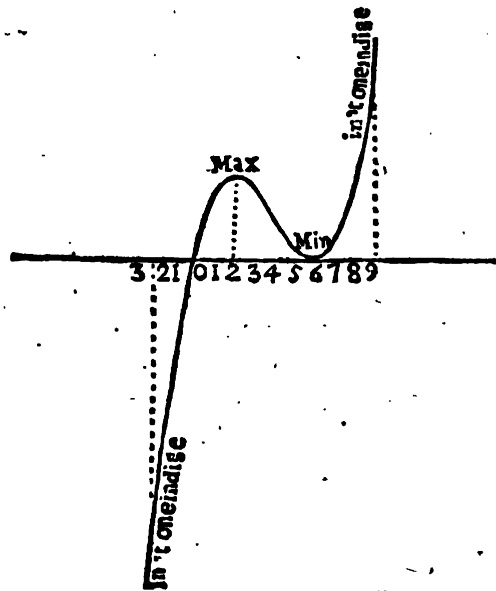
$$\text{en } n = 2 \text{ of } 6:$$

zoodat de tweede en zesde Termen de allergrootfte en kleinfte zijn, dat

dat is van de naburige Termen, gelijk uit de *Seriës* zelve blijken kan: aldus

n = . . &c. — 2, — 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 &c.
T = . . &c. — 64, — 24½, 0, 12½, 16, 13½, 8, 2½, 0, 3½, 16 &c.

waarvan de tweede Term 16 de grootste en de zesde Term 0 de kleinste is: want de eerste 0, overeenstemmende met n = 0, is geen *Minimum*, omdat de voorafgaande en volgende Termen niet beide grooter dan 0 zijn, en dus de *Seriës* hier naar voren gaande geregeld afklimt, even als zij achter de laatste 0 naar achteren gaande geregeld opklimt; kunnende den loop dezer getallen zigtbaarlijk door de volgende kromme Lijn worden aangewezen.



III. AANMERKING.

Tot hiertoe hebben wij leeren vinden den algemeenen Term van *Arithmetische Seriës*, het zij de nodige Termen daarvan op gelijke

of ongelijke afstanden van elkander gegeven zijn. Op dezelfde wijze kan men handelen met de Reeksen harer eerste, tweede, derde enz. *Aggregaten* of Verschillen, zoo als bij het *Eerste Voorstel* reeds aangewezen is. Doch dewijl het voor de *Praktijk* somtijds noodig is, om een enkelen Term van een der Reeksen van de Verschillen, voornamelijk de eersten derzelven, afzonderlijk te weten; maken wij hiervan nog het volgend

VIERDE ALGEMEEN VOORSTEL.

Gegeven zijnde eene *Arithmetische Seriës* $A, \overset{I}{A}, \overset{II}{A}, \overset{III}{A}, \overset{IV}{A}$, &c. waarvan de eerste Verschillen zijn $B, \overset{I}{B}, \overset{II}{B}, \overset{III}{B}$ &c., de tweede Verschillen $C, \overset{I}{C}, \overset{II}{C}$ &c. en zoo vervolgens; om de eerste Termen van elk dezer Reeksen van Verschillen te bepalen?

OPLOSSING.

Even als in het *Eerste Voorstel*, hebben wij hier

$$\begin{array}{c} A,\ \overset{I}{A},\ \overset{II}{A},\ \overset{III}{A},\ \overset{IV}{A},\ \overset{V}{A},\ \&c. \\ B,\ \overset{I}{B},\ \overset{II}{B},\ \overset{III}{B},\ \overset{IV}{B},\ \&c. \\ C,\ \overset{I}{C},\ \overset{II}{C},\ \overset{III}{C},\ \&c. \\ D,\ \overset{I}{D},\ \overset{II}{D},\ \&c. \\ E,\ \overset{I}{E},\ \&c. \\ F,\ \&c. \end{array}$$

Bijgevolg

$$B=\overset{I}{A}-A$$
$$C=\overset{I}{B}-B=\overset{II}{A}-2\overset{I}{A}+A$$
$$D=\overset{I}{C}-C=\overset{II}{B}-2\overset{I}{B}+B=\overset{III}{A}-3\overset{II}{A}+3\overset{I}{A}-A$$
$$E=\overset{I}{D}-D=\overset{II}{C}-2\overset{I}{C}+C=\overset{III}{B}-3\overset{II}{B}+3\overset{I}{B}-B=\overset{IV}{A}-4\overset{III}{A}+6\overset{II}{A}-4\overset{I}{A}+A$$
$$F=\overset{I}{E}-E=\overset{II}{D}-2\overset{I}{D}+D=\overset{III}{C}-3\overset{II}{C}+3\overset{I}{C}-C=\overset{IV}{B}-4\overset{III}{B}+6\overset{II}{B}-4\overset{I}{B}+B$$
$$=\overset{V}{A}-5\overset{IV}{A}+10\overset{III}{A}-10\overset{II}{A}+5\overset{I}{A}-A$$

&c. &c. &c. &c. &c.

En

En dus, in 't algemeen, voor de Reeks der m^de^ Verschillen

$$M=\overset{(m)}{A}-m\overset{(m-1)}{A}+\frac{m(m-1)}{2}\overset{(m-2)}{A}-\frac{m(m-1)(m-2)}{2.\ 3.}\overset{(m-3)}{A}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.\ 3.\ 4}\overset{(m-4)}{A}-\&c.$$

tot $m-1$ termen.

Dat te vinden was.

AANMERKING.

De uitdrukkingen (m), (m-1) enz. boven de Letter A beteekenen hier geene *Exponenten* van A, maar alleen den afstand der Termen van den eersten Term.

I. VOORBEELD.

Om den eersten Term der tweede Verschillen te vinden van de *Seriës* 4, 9, 16, 25 &c.?

Hier is $m=2$: derhalve $M=\overset{II}{A}-2\overset{I}{A}+A$

dat is $M=16-18+4=2$.

Voor den eersten Term der derde Verschillen zou men hebben,

$$M=\overset{III}{A}-3\overset{II}{A}+3\overset{I}{A}-A$$

dat is $M=25-48+27-4=52-52=0$

zoo als behoort.

2. VOORBEELD.

Men vraagt naar den eersten Term van de vierde Verschillen der Teerlingsgetallen 1, 8, 27, 64, 125, 216 &c.

In dezen is $m=4$: dus $M=\overset{IV}{A}-4\overset{III}{A}+6\overset{II}{A}-4\overset{I}{A}+A$

of $M=125-4.64+6.27-4.8+1$

of $M=125-256+162-32+1=288-288=0$.

3. VOORBEELD.

Om den eersten Term te vinden der vijfde Verschillen van de *Hexagonaal-Pijramidaal*-Getallen van het vierde Geslacht; te weten

1, 10, 49, 168, 462, 1092, 2310, &c.

Nu is $m=5$: dus $M=\overset{V}{A}-5\overset{IV}{A}+10\overset{III}{A}-10\overset{II}{A}+5\overset{I}{A}-A$

Maar $\overset{V}{A}=1092$	en $5\overset{IV}{A}=2310$
$10\overset{III}{A}=1680$	$10\overset{II}{A}=490$
$5\overset{I}{A}=50$	$A=1$
2822	2801
2801	
Bijgevolg $M=21$	

Want de *Seriës* is	1, 10, 49, 168, 462, 1092, &c.
Eerste Verschillen	9, 39, 119, 294, 630, &c.
Tweede ———	30, 80, 175, 336, &c.
Derde ———	50, 95, 161, &c.
Vierde ———	45, 66, &c.
Vijfde ———	21, &c.

AANMERKING.

Uit het Voorstel is blijkbaar, dat de Regel algemeen is, offchoon de grootheden A, $\overset{I}{A}$, $\overset{II}{A}$, $\overset{III}{A}$ &c. geene eigentlijke *Arithmetische Seriës* uitmaken; als in de beide volgende voorbeelden.

4. VOORBEELD.

De eerste der 8ste Verschillen te vinden van de *Geometrische Seriës*

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 &c.

Hier is $m=8$: dus $M=\overset{VIII}{A}-8\overset{VII}{A}+28\overset{VI}{A}-56\overset{V}{A}+70\overset{IV}{A}-56\overset{III}{A}+28\overset{II}{A}-8\overset{I}{A}+A$

Maar

Maar $\overset{\text{VIII}}{A} = 256$		en $8\overset{\text{VII}}{A} = 1024$	
$28\overset{\text{VI}}{A} = 1792$		$56\overset{\text{V}}{A} = 1792$	
$70\overset{\text{IV}}{A} = 1120$		$56\overset{\text{III}}{A} = 448$	
$28\overset{\text{II}}{A} = 112$		$8\overset{\text{I}}{A} = 16$	
$A = 1$		3280	
3281			
3280			
Derhalve $M = 1$			

5. VOORBEELD.

De eerste der 5de Verschillen te vinden van de *Seriës*

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32}\ \&c.$$

Hier is $m=5$: dus $M = \overset{\text{V}}{A} - 5\overset{\text{IV}}{A} + 10\overset{\text{III}}{A} - 10\overset{\text{II}}{A} + 5\overset{\text{I}}{A} - A$

of $M = \frac{1}{32} - \frac{5}{16} + \frac{10}{8} - \frac{10}{4} + \frac{5}{2} - 1$

of $M = \frac{121}{32} - \frac{61}{16} = -\frac{1}{32}$.

I. GEVOLG.

Als men neemt $\overset{\text{I}}{A}$ in plaats van A
$\overset{\text{II}}{A}$ — —— — $\overset{\text{I}}{A}$
&c. &c.

komt $\overset{\text{I}}{B}$ in plaats van B, $\overset{\text{II}}{B}$ in plaats van $\overset{\text{I}}{B}$ &c.
$\overset{\text{I}}{C}$ — —— — C, $\overset{\text{II}}{C}$ — —— — $\overset{\text{I}}{C}$ &c.

En zoo vervolgens, en dus kan men, op dezelfde wijze, ook de tweede, derde enz. Termen der eerste, tweede, derde &c. Verschillen bepalen.

VOORBEELD.

Gegeven zijnde de *Seriës*

1, 3, 9, 27, 81, 243, &c.

om den derden Term der derde Verschillen te vinden?

Hier is $m=3$: dus $M=\overset{III}{A}-3\overset{II}{A}+3\overset{I}{A}-A$

Voor A neme men nu den derden Term 9:

dan is $M=243-3.81+3.27-9=81-9=72$

Want 1, 3, 9, 27, 81, 243, &c.

2, 6, 18, 54, 162, &c.

4, 12, 36, 108, &c.

8, 24, 72, &c.

II. GEVOLG.

Als de Getallen $A, \overset{I}{A}, \overset{II}{A}, \overset{III}{A}$ &c., waarvoor wij nu, gemakshalve, zullen schrijven a, b, c, d &c. tot gelijke verschillen kunnen gebragt worden, zal men hebben

1°. $a-b=0$, als de getallen zelve gelijk zijn.

2°. $a-2b+c=0$, als de 1ste verschillen gelijk zijn.

3°. $a-3b+3c-d=0$, als de 2de verschillen gelijk zijn.

4°. $a-4b+6c-4d+e=0$, als de 3de verschillen gelijk zijn.

&c. &c.

m°. $a-mb+\frac{m(m-1)}{2}c-\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}d+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}e$ &c.$=0$,

als de (m-1)de verschillen gelijk zijn.

Bijgevolg als 'er van $m+1$ getallen, of Termen van eene *Arithmetische Seriës*, welker (m-1)de verschillen alle aan elkander gelijk zijn, m Termen gegeven zijn, zal men den overigen Term door eene eenvoudige *Equatie* kunnen vinden.

VOORBEELD.

Van een *Seriës*, welker vierde verschillen standvastig zijn, vijf Ter-

Termen naar welgevalle gegeven zijnde, zal men den zesden kunnen vinden: want alsdan is $a-5b+10c-10d+5e-f=0$

Aldus, gegeven zijnde 8, 16, ... 57, 99, 163
a, b, c, d, e, f.

$$\text{Zoo is } 10c = f-5e+10d+5b-a$$

$$\text{en } c = \frac{f-5e+10d+5b-a}{10}$$

$$\text{dat is } c = \frac{163-495+570+80-8}{10} = \frac{310}{10} = 31.$$

III. GEVOLG.

Als de Getallen a, b, c, d &c. wel niet volstrektelijk tot gelijke verschillen kunnen gebragt worden, maar echter nagenoeg aan elkander gelijk zijn, zoodat hunne eerste verschillen maar zeer klein zijn, zal men hunne tweede, of derde, of vierde enz. verschillen kunnen gelijk stellen, en dus ook, als 'er van $m+1$ dezer Getallen een aantal van m gegeven zijn, het overige nagenoeg kunnen bepalen, en wel des te nader, naarmate hetzelve meer in de midden komt der gegevene getallen, en naarmate 'er meer van dezelven gegeven zijn. Dit kan somtijds van nut zijn, als blijkt uit de volgende voorbeelden.

I. VOORBEELD.

Gegeven zijnde de *Logarithmen* der getallen 101, 102, 104 en 105; om den *Logarithmus* van 103 te vinden?

Hier is $m=4$; omdat 'er 4 getallen gegeven zijn:

$$\text{daarom } a-4b+6c-4d+e=0$$

$$\text{en } 6c = 4(b+d)-(a+e)$$

Nu is b = *Log.* 102 = 2,0086002   a = *Log.* 101 = 2,0043214
d = *Log.* 104 = 2,0170333   e = *Log.* 105 = 2,0211893

4,0256335 (4   4,0255107
16,1025340
4,0255107
6) 12,0770233
c = 2,0128372 = *Log.* van 103.

2. VOORBEELD.

Gegeven zijnde de Teerlings-wortels uit 45, 46, 47, 48 en 49, om den Teerlings-wortel uit 50 te vinden?

Hier is $m = 5$: daarom $a - 5b + 10c - 10d + 5e - f = 0$

en $f = a + 5(e - b) - 10(d - c)$

Nu is $a = \sqrt[3]{45} = 3{,}556893$
$b = \sqrt[3]{46} = 3{,}583048$
$c = \sqrt[3]{47} = 3{,}608826$
$d = \sqrt[3]{48} = 3{,}634241$
$e = \sqrt[3]{49} = 3{,}659306$

$d = 3{,}634241$	$e = 3{,}659306$
$c = 3{,}608826$	$b = 3{,}583048$
$0{,}025415$ (10	$0{,}076258$ (5
$0{,}254150$	$0{,}381290$
	$a = 3{,}556893$
	$3{,}938183$
	$0{,}254150$

Komt $f = \sqrt[3]{50} = 3{,}684033$

3. VOORBEELD.

Gegeven zijnde de Tiende Magtswortel uit $100 = 1{,}584893$
uit $101 = 1{,}586472$
uit $102 = 1{,}588035$
om die uit 103 te vinden?

Hier is $m = 3$: daarom $a - 3b + 3c - d = 0$ en $d = 3(c - b) + a$

$c = 1{,}588035$
$b = 1{,}586472$
1563 (3
4689
$a = 1{,}584893$

Komt $d = 1{,}589582 = \sqrt[10]{103}$, dat tot aan de laatste letter naauwkeurig is.

EINDE.



